Ensembles-Applications
Relations Binaires

Giuseppe Peano (1858-1932)

Mathématicien et linguiste italien. Pionnier de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, une axiomatisation de l'arithmétique et une pour la théorie des ensembles. Il est par ailleurs l'inventeur d'une langue auxiliaire internationale le le latin sans flexions (LsF). Il fut membre du comité qui créa la délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale. Peano fut l'un des protagonistes de la crise des fondements des mathématiques, en particulier à travers l'influence qu'il eut sur Bertrand Russell.

Blaque du jour

Une femme dit à son mari mathématicien :
- J'ai peur que tu m'aimes moins que les maths, parcque tout le temps tu ne parles que maths...
- Absurde, je t'aime plus que tout.
- Prouve-le !
- OK. Raisonnons par l'absurde. Soit A l'ensemble de tous les êtres aimables, supposons que tu n'y appartiens pas...

Exercice 1

Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E donnés.
Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations :

— $A \cap X = B$.

— $A \Delta X = B$.

Exercice 2

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E.

Soit $\begin{array}{rccl} \phi :: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$

1. Qu'est-ce que $\phi(\emptyset)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\emptyset, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

Exercice 3

Montrer que la relation définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par :
$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow (a$ divise c, d divise $b)$ est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4, 12)$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A = \left\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{k(k+1)}{2} \leqslant n\right\}$ et $s = \max A$.
   Dire pourquoi s existe.
2. Montrer que $\frac{s(s+1)}{2} \leqslant n < \frac{(s+1)(s+2)}{2}$.
3. En déduire que l'application : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \mapsto & a + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array}$ est bijective.
4. En déduire que la relation définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par :
   $$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} \leqslant c + \frac{(c+d)(c+d+1)}{2}$$
   est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4,12)$.
5. Donner les 5 premiers éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pour cette relation d'ordre.

Exercice 5 : Congruence des carrés modulo 5.

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \quad [5]$.

1. Déterminer l'ensemble quotient.
2. Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

Exercice 6

Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparer $f(A \,\Delta\, A')$ et $f(A) \,\Delta\, f(A')$.
4. Comparer $f^{-1}(B \,\Delta\, B')$ et $f^{-1}(B) \,\Delta\, f^{-1}(B')$.
5. Montrer que f injective $\Longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
6. Montrer que f surjective $\Longrightarrow \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
7. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\, A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 7

Soient E, F, G des ensembles, $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$. Montrer que :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.
4. $g \circ f \circ h$ et$f \circ h \circ g$ injectives et $h \circ g \circ f$ surjectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.
5. $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ surjectives et $h \circ g \circ f$ injectives $\Rightarrow g$ et h bijectives.

Exercice 8

Soient deux relations d'équivalence : $\mathcal{R}$ sur E, et $\mathcal{S}$ sur F. On définit sur $E \times F$:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{S}y'.$$

1. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi :: \begin{array}{ccc} E \times F & \to & (E/\mathcal{R}) \times (F/\mathcal{S}) \\ (x, y) & \mapsto & (\dot{x}, \dot{y}) \end{array}$
   Démontrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 9

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathcal{P}(E)$:

$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi :: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ X & \mapsto & X \setminus A \end{array}$
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 10 : Partie stable par une application.

Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$. Pour tout $A \subset E$, on pose : $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Exercice 11 : Parties saturées pour une relation d'équivalence.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup\limits_{x \in A} \dot{x}$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \Leftrightarrow (\dot{x} \cap s(A) \neq \emptyset)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.
4. Démontrer que $s\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap\limits_{i \in I} s(A_i)$.
5. Donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 12 : Parties saturées pour une application

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et $\mathcal{S} = \{X \subset E \text{ tq } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \emptyset$.
   Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.
4. Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathcal{S}$.
5. Montrer que l'application $\Phi :: \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$ est une bijection.

Exercice 13

Soit E un ensemble et $\mathcal{E} = \{(A, f) \text{ tq } A \subset E,\ A \neq \emptyset, \text{ et } f \in E^A\}$. On ordonne $\mathcal{E}$ par :

$$(A, f) \preceq (B, g) \Leftrightarrow \begin{array}{l} A \subset B \\ \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x) \end{array}$$

(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathcal{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?
3. Même question avec minorée.

Exercice 14 : Relation binaire induite par une application

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
   - i. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
   - ii. Préciser $\dot{x}$ pour tout $x \in E$.
2. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow f(A) = f(B)$.
   - i. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
   - ii. Préciser $\dot{A}$ pour tout $A \subset E$.
3. On suppose maintenant que f est injective et que F est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{S}$ par : $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
   - i. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
   - ii. Cet ordre est il total ou partiel.

Fin