Equations Différentielles
Calcul de Primitives

Les Bernoulli

Famille italienne de mathématiciens et de physiciens, issue de Nicolas Bernoulli (1623-1708). Les représentants les plus connus de cette famille sont : Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas, et Daniel (1700-1782), son petit-fils.

Blaque du jour

C'est l'histoire de x^2 qui se promène dans la forêt. Quand il ressort, il s'est transformé en x, pourquoi ?
Car il a trébuché contre une racine.

Exercice 1 : Équation d'Euler

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in I \quad at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$$

1. On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}_+^*$.
   - i. En posant $z(t) = ye^t$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
   - ii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Résoudre E dans le cas où $I = \mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$$

Exercice 2 : Equation de Bernouilli

Elle est de la forme : $y = ya(x) + y^\alpha b(x)$, pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $z = y^{1-\alpha}$. on se raméne alors à une équation linéaire du 1er ordre. Résoudre :

1. $x^2y' + y + y^2 = 0$.
2. $y' + xy = x^3y^3$.

Exercice 3 : Equation de Ricatti

Elle est de la forme : $y = y^2a(x) + yb(x) + c(x)$; pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $y = y_0 + z$ où y_0 solution particuliére à trouver, on se raméne alors à une équation de Bernouilli. Résoudre :

1. $\left(1 + x^3\right) y' = y^2 + x^2y + 2x$.
2. $y' + y^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Exercice 4 : Equations fonctionnelles

Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $2\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}(f(x) + 2f(0)).$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda - x)$$

4. Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

On utilisera les résultats sur l'équations d'Euler.

Exercice 5 :Applications géometriques

1. Soit D une droite passant par l'origine déterminer puis tracer les courbes telles que O soit à égale distance entre les points de la courbe et l'intersection de D avec la normale à la courbe au méme point,faire un dessin.
2. Déterminer la forme d'un miroir de sorte que tous les rayons issus d'un point O soient réflichis vers un même point A.

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y" - 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = e^x \sin(x), \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
3. $y'' + y' = 3 + 2x$
4. $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$
5. $y'' + 3y' + 2y = e^x$
6. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
7. $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$
8. $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$
9. $y'' - 4y' + 4y = x\cosh(2x)$
10. $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$
11. $y'' + y = \sin^3 x$
12. $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\sin x - 4e^x \sin(2x)$

Exercice 7 : Problème de Cauchy

Résoudre le suivant : $\begin{cases} y"(x) - 2y'(x) + 3y(x) = ch^2(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 8 : Utilisation du plan de phase

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentielle de la forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 9 :Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Intégrer les équations suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
   reponse : $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.
2. $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) y' + 8x^2 y = x^4$ (poser $u = x^2$).
   reponse : $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \dfrac{2x^2+3}{16}$.
3. $x(1 - 2\ln x)y'' + (1 + 2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
   reponse : $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$.
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$ (poser $u = \ln x$). reponse : $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.
5. $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
   reponse : $y = x^2 \ln|x+1| + \lambda x^2 \left(\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + x - \dfrac{1}{2}\right) + \mu x^2$.
6. $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ $\left(\text{poser } y = \dfrac{u}{x^2}\right)$.
   reponse :$y = \dfrac{-1 + a\cosh x + b\sinh x}{x^2}$.
7. $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales). reponse : $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.
8. $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

FIN