Probabilités dicrètes infinies

Exercice 1 (Oral CCP 2015)

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 2 (Oral CCP 2015)

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 3 (Oral CCP 2015)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
   c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

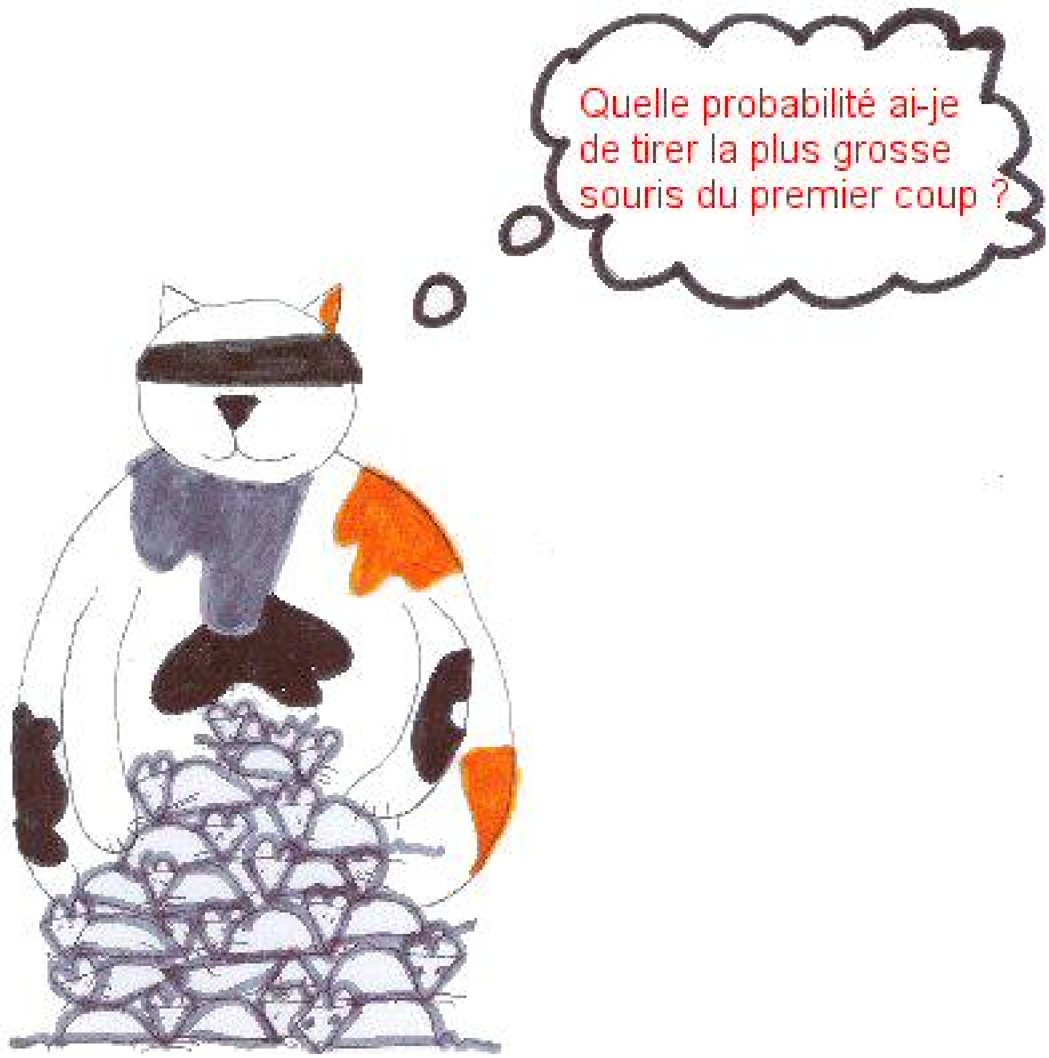
Exercice 4 (Oral CCP 2015)

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1,1[$, $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in\,]-1,1[$.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.



Corrigé

Exercice 1

1) $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. Soit $n \geqslant r$. L'événement $\{X = n\}$ est réalisé si et seulement si la bactérie a été touchée exactement $r-1$ fois au cours des $n-1$ premiers tirs et est touchée au n-ème tir.
La probabilité de l'événement « la bactérie a été touchée exactement $r-1$ fois au cours des $n-1$ premiers tirs » est obtenue à partir d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n-1$ et p : elle est égale à $\binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)}$ et donc

$$\forall n \geqslant r,\ P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \times p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

2) L'espérance de X est

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=r}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=r}^{+\infty} n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} = rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \times \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \\
&= rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \times \binom{n}{r} (1-p)^{n-r} = np^r \frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}} \\
&= \frac{r}{p} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, X admet une espérance et $E(X) = \frac{r}{p}$.

Exercice 2

1) Il existe trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$, $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

- $a = \lim_{x \to 0} xR(x) = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}$.
- $b = \lim_{x \to -1} (x+1)R(x) = \frac{1}{(-1+0)(-1+2)} = -1$.
- $c = \lim_{x \to -2} (x+2)R(x) = \frac{1}{(-2+0)(-2+1)} = \frac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} H_N - \left(H_N + \frac{1}{N+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\
&\underset{N \to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + o(1) \underset{N \to +\infty}{=} \frac{1}{4} + o(1).
\end{aligned}$$

Puisque $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\lambda}{4}$, on obtient $\lambda = 4$.

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= 4\times\frac{1}{2} \text{ (série télescopique)}\\ &= 2.\end{aligned}$$

4) X admet une espérance. Donc, X admet une variance $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$ si et seulement si X^2 admet une espérance. Or $n^2P(X=n) = \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to=\infty}{\sim} \dfrac{4}{n} > 0$ et donc la série de terme général $n^2P(X=n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, diverge. La variable X n'admet pas de variance.

Exercice 3

1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}P(X_i \leqslant n) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\frac{1-q^n}{1-(1-p)} \text{ (car } q\neq 1)\\ &= 1-q^n,\end{aligned}$$

puis $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $Y > n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!]$, $X_i > n$. Donc, l'événement $\{Y > n\}$ est l'événement $\{X_1 > n\} \cap \ldots \cap \{X_N > n\}$. Puisque les variables $X_1, \ldots, X_N$ sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned}P(Y>n) &= P\left((X_1 > n)\cap\ldots\cap(X_N>n)\right) = \prod_{k=1}^{N} P(X_i > n)\\ &= q^{nN}.\end{aligned}$$

On en déduit que $P(Y \leqslant N) = 1 - q^{nN}$.

Ensuite, si $n \geqslant 2$, $P(Y=n) = P(Y>n-1) - P(Y>n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right)$ ce qui reste vrai pour $n=1$ car $P(Y=1) = P(Y\leqslant 1) = 1-q^N$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right).$$

b) $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n) = \left(1-q^N\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(q^N\right)^{n-1}$ avec $q^N \in]0,1[$.

On sait que pour tout réel x de $]0,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ puis par dérivation terme à terme, licite dans l'intervalle ouvert de convergence

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc,

$$E(Y) = \left(1-q^N\right)\frac{1}{(1-q^N)^2} = \frac{1}{1-q^N} < +\infty.$$

Y admet une espérance à savoir $E(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}$.

Exercice 4

1) • $\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n))\geqslant 0.$
• Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=p(1-p)^n<+\infty$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n=\frac{p}{1-(1-p)}=1<+\infty$$

Donc, la famille $(P((X=k)\cap(Y=n)))_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} P((X=k)\cap(Y=n))=1.$

On a donc bien défini une loi de probabilité.

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=p(1-p)^n.$$

b) Posons $Z=1+Y$. $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P(1+Y=n)=P(Y=n-1)=p(1-p)^{n-1}.$$

Donc, $1+Y$ suit une loi géométrique de paramètre p.

c) On sait alors que $E(Y)=E(Z-1)=E(Z)-1=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{1-p}{p}$.

3) $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(X=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k}\\&=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}}\ \left(\text{car } 0<\frac{1-p}{2}<\frac{1}{2}<1\right)\\&=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\left(\frac{2}{1+p}\right)^{k+1}=\frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k.\end{aligned}$$