My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices : Séries Numériques

Feuille d'Exercices
2016-2017

Nature et somme d'une série numérique

Exercice 1 : Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **2.** $\sum \frac{n^2\, 2^n}{n!}$ **3.** $\sum_{n\geq 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$

4. $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ **5.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$ **6.** $\sum \frac{n^2+n-1}{n!}$

Exercice 2 : Déterminez la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\; n^2}$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^2}$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **5.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ **6.** $\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 3 : Étudiez la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$.

Comparaisons séries-intégrales

Exercice 4 : Séries de Bertrand

1. Déterminez en fonction de $\beta \in \mathbf{R}$ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$.

2. Montrez que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 5 : Étudiez en fonction de α la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$.

Exercice 6 : Équivalents des sommes partielles et des restes pour une série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et si $\alpha > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminez un équivalent de S_n.

2. On suppose que $\alpha > 1$. Déterminez un équivalent de R_n.

Convergence des séries à termes positifs

Exercice 7 : Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudiez les séries de termes généraux

1. u_n^2 **2.** $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ **3.** $\frac{u_n}{1+u_n}$

Exercice 8 : Règle de D'Alembert —. Soit (u_n) strictement positive telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$, montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} \leq k\, u_n$. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. On suppose que $\ell > 1$. Montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

3. On suppose que $\ell = 1$. Montrez que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ alors la série $\sum u_n$ diverge mais qu'on ne peut pas conclure de façon générale lorsque $\ell = 1$.

Convergence des séries à termes non positifs

Exercice 9 : Séries alternées —. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.
On étudie la série $\sum(-1)^n v_n$. On note pour $n \in \mathbf{N}$ S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. Démontrez que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire que la série $\sum(-1)^n v_n$ converge.

3. Démontrez pour tout entier naturel, $|R_n| \leq v_{n+1}$.

Liens entre suites et séries

Exercice 10 : Série harmonique et constante d'Euler —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1. Montrez que (u_n) converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. γ est appelée la constante d'Euler.

2. En déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

3. Déterminez la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+2+\cdots+n}$, et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11 : Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Développement en séries de Taylor

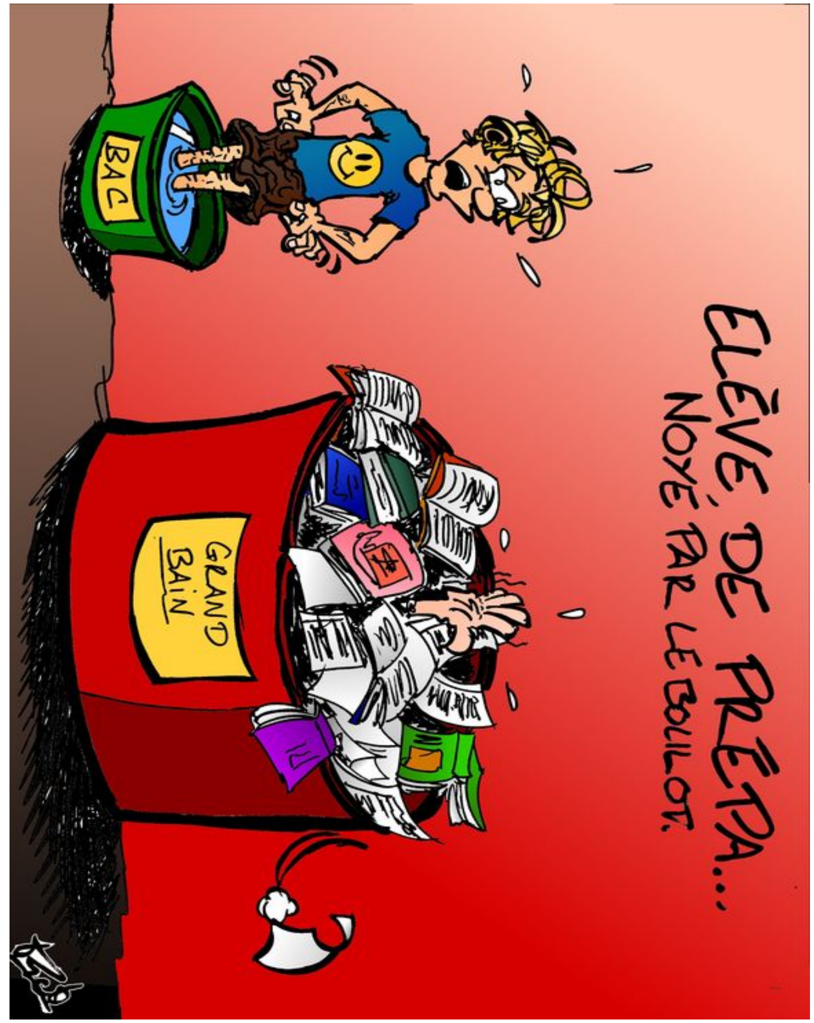
Exercice 12 : Séries exponentielles
Montrez que pour tout nombre réel x, la série $\sum\limits_n \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente de somme $\exp(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

Exercice 13 : Séries sinus et cosinus
Montrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$, les séries $\sum\limits_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum\limits_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sont convergentes et :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$.



CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 .— 1. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la methode frac et on décompose le terme général en éléments simples de première espèce : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Il s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a **télescopage**. On peut alors expliciter la somme partielle d'indice n

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par définition, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1.

2. La présence du nombre factoriel au dénominateur suggère que nous sommes en présence d'une série exponentielle. On applique la methode Pnxn :

$$\frac{k^2\ 2^k}{k!} = \frac{[k(k-1)+k]\ 2^k}{k!} = \frac{k(k-1)}{k!}\ 2^k + \frac{k}{k!}\ 2^k$$

On explicite alors la somme partielle d'indice n : commentaireon observe d'abord On peut **alors** simplifier les nombres factoriels et enfin effectuer les changements d'indice qui vont bien !

la nullité des premiers termes dans chacune des deux sommes.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\ 2^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}\ 2^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\ 2^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}\ 2^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}\ 2^k \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2!)}\ 2^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\ 2^k = 4\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}\end{aligned}$$

On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série $\exp(2)$. On peut alors réécrire la somme partielle de notre série sous la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\ 2^k}{k!} = 4E_{n-2} + 2E_{n-1}$$

Comme la suite (S_n) converge vers e^2, il en résulte par opérations algébriques sur des suites convergentes que (S_n) converge vers $6e^2$. Par définition, cela signifie que la série $\sum \dfrac{n^2\ 2^n}{n!}$ converge et a pour somme $6e^2$.

3. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la methode frac. Soit $k \geq 2$, $F(k) = \dfrac{3k+2}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. commentaireOn détermine les coefficients a, b, c à l'aide de la methode polesimple

$$\begin{aligned}(X-1)F(X) &= \tfrac{3X+2}{X(X+1)} \xrightarrow[x=1]{} a = \frac{5}{2} \\ XF(X) &= \tfrac{3X+2}{X^2-1} \xrightarrow[x=0]{} b = -2 \\ (X+1)F(X) &= \tfrac{3X+2}{X(X-1)} \xrightarrow[x=-1]{} c = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$F(k) = \frac{5}{2}\ \frac{1}{k-1} - 2\ \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{k+1}$$

On explicite alors la somme partielle d'indice n de la série proposée : commentairecomme $\frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 0$ les termes qui apparaissent dans les trois sommes se simplifient. Seuls ne subsistent que les autres termes, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des indices n'appartenant pas à $[\![3, n-1]\!]$

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{3k+2}{k(k^2-1)} = \frac{5}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{11}{4}\end{aligned}$$

Par définition, la série $\sum \dfrac{3n+2}{n(n^2-1)}$ converge et a pour somme $\dfrac{11}{4}$.

4. commentairele terme général ne ressemble même pas de loin au terme général d'une série classique, on cherche donc à faire apparaître un télescopageSuivant l'indication fournie, commençons par simplifier l'expression du terme général. Soit $k \in \mathbf{N}^\star$, on a

- $0 \leq \operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$
- $\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1}\right) = \dfrac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k(k+1)}} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)+1} = \dfrac{1}{k^2+k+1}$.

Ces deux propriétés signifient précisément que

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\text{Arctan}\,\frac{1}{k}-\text{Arctan}\,\frac{1}{k+1}.$$

Comme le terme général de la série à étudier est la différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a télescopage. Pour $n\in\mathbf{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \text{Arctan}\,(1)+\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Arctan}\,\frac{1}{k}-\text{Arctan}\,\frac{1}{k+1}\right]\\ &= \text{Arctan}\,(1)+\text{Arctan}\,(1)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 2\text{Arctan}\,(1)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, par définition, la série de terme général $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge et a pour somme $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Soit $k\geq 2$. On observe que $\ln\left(\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right)=\ln\left(\dfrac{k+1}{k+3}\right)-\ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)$. Le terme général s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a donc télescopage. Pour $n\in\mathbf{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k+3}\right)-\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(3).\end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence de la série et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)=\ln(3)$.

6. On applique la methode Pnxn :

$$\frac{k^2+k-1}{k!}=\frac{k(k-1)+2k-1}{k!}=\frac{k(k-1)}{k!}+2\ \frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}$$

On en déduit pour $n\geq 2$commentairedétaillez bien les étapes de ce calcul comme dans l'étude de la série **2.**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k-1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}+2\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+2\sum_{k=0}^{n-1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=E_{n-2}+2E_{n-1}-E_n\end{aligned}$$

où on a noté pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, $E_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série exponentielle. Comme (E_n) converge vers e, il s'ensuit que $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k-1}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2e$. La série $\displaystyle\sum\frac{n^2+n-1}{n!}$ converge et a pour somme $2e$.

7. On applique la methode Pnxn. Soit $k\in\mathbf{N}$, $\dfrac{k^2+3k}{2^k}=\dfrac{k(k-1)}{2^k}+4\ \dfrac{k}{2^k}$. Par conséquent, la somme partielle d'indice n s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2^k}+4\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{1}{2^k}+4\ \sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{2^k}\\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}+4\frac{1}{2}\ \sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques de raison $\frac{1}{2}$ dérivées d'ordre 1 et 2. commentaireComme $0\leq\frac{1}{2}<1$ les séries géométriques et dérivées de raison $\frac{1}{2}$ convergent !Par opérations algébriques sur des suites possédant des limites, il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k}{2^k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}+2\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=12$. Autrement dit, la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n}{2^n}=12$.

8. Soit $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k^2+k+1)e^{-k} &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)e^{-k}+2\ \sum_{k=0}^{n}ke^{-k}+\sum_{k=0}^{n}e^{-k}\\ &= e^{-2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)e^{-k+2}+2\ e^{-1}\sum_{k=0}^{n}ke^{-k+1}+\sum_{k=0}^{n}e^{-k}\end{aligned}$$

Comme la raison e^{-1} de ces suites géométriques et dérivées appartient à $]0,1[$, elles convergent et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)e^{-n}=\frac{2e}{(e-1)^3}+\frac{2e}{(e-1)^2}+\frac{e}{e-1}$. ▲

Exercice 2 .— 1. Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir du rang 3). commentaireDans cette première étude comme souvent, il s'agit d'une série à termes positifs. Pour déterminer sa nature, on cherche à la comparer avec une série de Riemann, convergente ou divergente au moyen de la methode nalphaun. On l'applique ici avec $\alpha=2$.Pour déterminer sa nature nous comparons le terme général u_n à une série de référence, à savoir une série de Riemann. Par croissances comparées

$$n^2 u_n = \frac{n^4 \ln(n)}{e^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On en conclut que $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

2. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\, n^2} \sim \frac{1}{\ln^3(n) n^{\frac{3}{2}}}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir d'un certain rang), appliquons la methode nalphaun avec $\alpha = \frac{3}{2}$. Il vient

$$n^{\frac{3}{2}} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ln^3(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

3. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n = \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^2} \sim \frac{\pi}{2n^2}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs : la methode nalphaun avec $\alpha = 2$ donne

$$n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

4. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise pour cela un développement limité de $\ln(1+h)$ au voisinage de 0. commentaireOn voit ici facilement grâce à son équivalent que u_n est de signe positif (lorsque n est assez grand) ce qui *a priori* n'était pas évident !

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Pour conclure, on applique la methode nalphaun avec $\alpha = 2$

$$n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

5. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise les développements limités de $\ln(1+h)$ et de $\cos(u)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{-1}{2n^2} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une série à termes négatifs : la methode nalphaun avec $\alpha = 2$ donne

pliquent aussi ! Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann

$$n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{-1}{2}$$

commentairelorsque la série est à termes négatifs les règles de comparaison s'ap-

convergente.

6. Commençons par obtenir un équivalent du terme général.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \\ \text{Or } \sqrt[n]{n} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1, \text{ donc } \sqrt[n]{n} \sim 1 \\ \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1 &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Finalement $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. D'après la **règle des équivalents** $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

7. u_n n'est pas de signe constant ! On applique la methode Srn. On a alors

$$|u_n| = \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

8. On détermine un équivalent de u_n

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \tan\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n = -\dfrac{1}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Autrement dit,$u_n \sim -\dfrac{1}{2n^3}$ et par conséquent $n^3|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{-1}{2}$. La règle $n^\alpha u_n$ (methode nalphaun) appliquée avec $\alpha = 3$ à la série à termes négatifs $\sum u_n$ montre qu'elle est convergente.

9. Déterminons un équivalent de u_n :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = \exp\left[n\ln\left(1\underbrace{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o(\frac{1}{n^2})}_{h_n}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Comme $h_n = -\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{24n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on a $h_n^2 = \dfrac{1}{4n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et par conséquent

$$\ln(1+h_n) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où l'on tire finalement

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right] - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\exp\left(1 - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right) \sim \frac{1}{12\sqrt{e}\ n} \end{aligned}$$

Ainsi $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{12\sqrt{e}}$, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.

10. On applique directement la methode nalphaun

$$n^2 u_n = \frac{e^{2\ln(n)}}{\left(\ln(n)\right)^{\ln(n)}} = \left(\frac{e^2}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

11. u_n n'est pas de signe constant ! On applique la methode Srn. On a alors commentaireAttention ici à bien conclure d'abord à la convergence de la série des valeurs absolue puis à la convergence de la série. En effet, la règle des équivalents ne s'applique pas lorsque les séries ne sont pas de signe constant.

$$|u_n| = \left|\frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}\right| \sim \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

12. Comme précédemment, on applique la methode Srn. Comme $|u_n| = \dfrac{\ln(n)}{e^n}$, on applique la methode nalphaun. Par croissances comparées,

$$n^2|u_n| = \frac{n^2\ \ln(n)}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente. ▲

Exercice 3 .— $\boxed{1}$ commentaireOn utilise la methode stirling$\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2} = \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, donc : $u_n \sim \dfrac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} \sim \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$.

$\boxed{2}$ Comme $n^{\frac{3}{2}}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\sum u_n$ converge par comparaison avec une série de Riemann. ▲

Exercice 8 .— Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < k$, il s'ensuit par compatibilité limite et inégalité qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < k$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, on a donc $0 \leq u_{n+1} \leq ku_n$. commentairela positivité de la suite est essentielle ici !On en déduit alors par récurrence immédiate que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq k^{n-n_0}u_{n_0}$$

On peut alors conclure à la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série géométrique de raison $k \in]0, 1[$.

2. On suppose ici que $\ell > 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, commentairecompatibilité limite et inégalité il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Comme (u_n) est strictement positive, ceci entraîne qu'elle est croissante, à partir du rang n_0. En particulier, la suite (u_n) ne saurait être convergente de limite nulle, la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente !

3. Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ l'argument ci-dessus est valide et la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente. Par contre, on ne peut rien dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, comme le montrent les deux exemples suivants.

- Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
- Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge. ▲

Exercice 11 .—

Exercice 12 .— On met en œuvre la methode taylorseries. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $S_n(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 de la fonction exp : Comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, il en résulte que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

Appliquons l'**inégalité de Taylor-Lagrange** entre 0 et x. Par croissance de la fonction exponentielle, tout réel t compris entre 0 et x

$$\big|\exp(x) - S_n(x)\big| \leq M\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \text{ par croissances comparées}$$

Ce qui prouve que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite $\exp(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, on obtient l'absolue convergence en appliquant cette propriété à $|x|$. ▲