Intégration Sur Un Segment

Td Immersion en Spé MP

Exercice 1 : Lemme de Lebesgue

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *montrer que :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) \ dt = 0$$

dans les cas suivants :

1) f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$.

2) f *en escalier sur* $[a, b]$.

3) f *continue par morceaux sur* $[a, b]$

Exercice 2 : *Irrationalité de* π *et de* e.

$(p, q, n) \in \mathbb{N}^{*3}$, *on pose* $P_n(X) = \dfrac{X^n(qX - p)^n}{n!}$.

1) *Préciser les racines de* P_n *ainsi que leurs multiplicités .*

2) *Montrer que* $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq 2n$.

3) *En déduire que* $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq 2n$.
Penser à un changement de variable.

4) *On suppose* $\pi \in \mathbb{Q}$ *et on pose* $\pi = \dfrac{p}{q}$.

a) *En déduire de ce qui précéde que* $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t) \sin t dt \in \mathbb{Z}$.

b) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^\pi P_n(t) \sin t dt = 0$.

c) *Conclure que la suite* $\left(\displaystyle\int_0^\pi P_n(t) \sin t dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est stationnaire en 0.*

d) *Déduire une contradiction, puis conclure.*

5) *En raisonnant cette fois sur* $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t) e^t dt$, *montrer que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : ***Intégrales de Wallis.***

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \ dt.$

1) *Comparer* I_n *et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \ dt.$

2) *En coupant* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *en* $[0, \alpha]$ *et* $\left[\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$, *démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$

3) *Chercher une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+2}.
En déduire I_{2k} *et* I_{2k+1} *en fonction de* k.

4) *Démontrer que* $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5) *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante*

6) *Démontrer que* $I_n \sim I_{n-1}$ *et en déduire un équivalent simple de* I_n *puis de* $\dbinom{2n}{n}$ *quand* $n \to \infty$.

Exercice 4 : – (Transcendance de e)

Soit e la base des logarithmes népériens. Le but de l'exercice est de montrer que e est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$, non nul, tel que $P(\mathrm{e}) = 0$.

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale f à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré m, on a :

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des entiers tels que $a_0 + a_1\mathrm{e} + a_2\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\mathrm{e}^n = 0$, et $a_0 \neq 0$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_p(x) = x^{p-1}\prod_{i=1}^{n}(x-i)^p, \qquad I_p(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-u} f_p(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad J_p = \sum_{k=0}^{n} a_k I_p(k)$$

   (a) Montrer que J_p est entier

   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $f_p^{(j)}(k)$ est divisible par $p!$.

   *(c) Montrer que si p est un nombre premier suffisamment grand, J_p est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $p!$.

   (d) Montrer que

$$|J_p| \leqslant C((n)^{n+1})^p \qquad \text{où} \qquad C = n\mathrm{e}^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

3. En considérant la limite de $\dfrac{C(n^{n+1})^p}{(p-1)!}$ lorsque p tend vers $+\infty$, trouver une contradiction et conclure.

Exercice 5 : Polynômes de Bernouilli

Dans tout le problème, pour P dans $\mathbb{R}[X]$, on identifiera le polynôme P avec sa fonction polynomiale associée et on notera P' le polynôme dérivé de P.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme B de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$B' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 B(t)dt = 0. \tag{1}$$
   (b) On note p le degré de P et a_p son coefficient dominant. Donner le degré et le coefficient dominant du polynôme B vérifiant la propriété (1).
2. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par les propriétés suivantes :
   $$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n' = nB_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Quel est le degré du polynôme B_n ?
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est unitaire.
   (c) Justifier que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite vérifiant la propriété (2).
   (d) Démontrer que :
   $$B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
   Indication : on pourra poser $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ et démontrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (2).
   (e) Démontrer que :
   $$B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \tag{4}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = B_n(0)$.
   (a) Démontrer, par récurrence, la formule suivante :
   $$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (b) Donner les polynômes B_1, B_2 et B_3 et les nombres b_1, b_2 et b_3.
   (c) Démontrer que $b_{2p+1} = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_p = B_p(1) = B_p(0)$.
   (e) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_{2p+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{k} b_k$.
   (f) En déduire que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_{2p} = -\dfrac{1}{(p+1)(2p+1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k$.
   (g) Calculer la valeur de b_4.

Fin