# Fonctions Réelles

## Etude d'une équation fonctionnelle

L'objectif du problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\ .$$

*Partie I*

1. Montrer que les fonctions $x\mapsto \cos x$ et $x\mapsto \text{ch}\, x$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$ .
2. Soit $f$ dans $\mathcal{E}$ .
   Montrer que pour tout réel $\alpha$ , la fonction $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x)=f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$ .
3. Soit $f$ dans $\mathcal{E}$ .
   En donnant à $x$ et $y$ des valeurs particulières, prouver que :

3.a $f(0)$ vaut 0 ou 1.

3.b Si $f(0)=0$ alors $f$ est la fonction identiquement nulle.

3.c Si $f(0)=1$ alors $f$ est une fonction paire.

*Partie II*

Dans cette partie, on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.
On introduit $f$ une telle fonction.

1. Etablir que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ : $f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$ .
2. En déduire l'existence d'une constante réelle $\lambda$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$ .
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+\mu y=0$ en séparant les cas $\mu>0$ , $\mu<0$ et $\mu=0$ .
4. Déterminer les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.

*Partie III*

Dans cette partie, on oublie l'hypothèse de dérivabilité et on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent tout en n'étant pas identiquement nulle. On introduit $f$ une telle fonction.

1. Montrer que $f(0)=1$ et que $f$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. On forme $E=\{x>0\,/\,f(x)=0\}$ .

2.a Montrer que $E$ admet une borne inférieure que l'on note $a$ .

2.b Prouver que $f(a)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que $a>0$ .

2.c Montrer que : $\forall x\in[0,a[\,, f(x)>0$ .

3. On pose $\omega=\dfrac{\pi}{2a}$ et on note $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ : $x\mapsto\cos(\omega x)$ .

3.a Soit $q\in\mathbb{N}$ . Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)+1=2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ .

3.b En déduire, en raisonnant par récurrence sur $q$ que : $\forall q\in\mathbb{N}$ , $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

3.c Démontrer aussi que $\forall p\in\mathbb{N}$ , $\forall q\in\mathbb{N}$ , $f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

3.d Etendre cette propriété à tout $p\in\mathbb{Z}$ .

4. On forme $D_a=\left\{\dfrac{pa}{2^q}\,/\,p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$.

4.a Etablir que tout réel est limite d'une suite d'éléments de $D_a$ .

4.b En déduire que $f=g$ .

# Correction

d'après Mines sup 2000 (spécialité)

*Partie I*

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et par développement :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y$.
La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est continue et :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $2\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\dfrac{e^y+e^{-y}}{2} = \dfrac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y}}{2} = \dfrac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}+\dfrac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$
ce qui donne : $2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)$.
Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. $f_\alpha$ est continue par opérations sur les fonctions continues.
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y) = f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$.
La fonction $f_\alpha$ appartient à $\mathcal{E}$.

3.a Pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0)(1-f(0)) = 0$ puis $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

3.b Supposons $f(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ donc $f = 0$.

3.c Supposons $f(0) = 1$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Pour $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(y)+f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$ donc $f(-y) = f(y)$ et $f$ est paire.

*Partie II*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
En dérivant la relation par rapport à $y$, on obtient $f'(x+y)-f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$.
En dérivant à nouveau par rapport à $y$, on obtient : $f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.

2. Posons $\lambda = f''(0)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, la relation ci-dessus donne $2f''(x) = 2f''(0)f(x)$ i.e. $f''(x) = \lambda f(x)$.

3. $y''+\mu y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+\mu = 0$.
Si $\mu > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes : $i\sqrt{\mu}$ et $-i\sqrt{\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x}+C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$.
Si $\mu < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $\sqrt{-\mu}$ et $-\sqrt{-\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1\cos(\sqrt{-\mu}x)+C_2\sin(\sqrt{-\mu}x)$.
Si $\mu = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double : 0.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 x + C_2$.

4. Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}$ deux fois dérivable.
$f$ peut être la fonction nulle.
Si $f$ n'est pas la fonction nulle alors $f$ est une fonction paire, vérifiant l'équation $f(0) = 1$ et solution d'une équation différentielle du type $y''+\mu y = 0$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
Dans le cas $\mu > 0$, on obtient $f(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x}+C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$ avec $C_1 = C_2$ (par parité) et $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ (par la relation $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\mu}x)$.
Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha = \sqrt{\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.
Dans le cas $\mu < 0$, on obtient $f(x) = C_1\cos(\sqrt{-\mu}x)+C_2\sin(\sqrt{-\mu}x)$ avec $C_2 = 0$ (par parité) et $C_1 = 1$

(par la relation $f(0)=1$). Par suite $f(x)=\cos(\sqrt{-\mu}x)$ .
Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha=\sqrt{-\mu}$ ) assure qu'une telle fonction est solution.
Dans le cas $\mu=0$ , on obtient $f(x)=C_1x+C_2$ avec $C_1=0$ (par parité) et $C_2=1$ (par $f(0)=1$). Par suite $f(x)=1$ . Inversement cette fonction est solution.
Résumons, les fonctions deux fois dérivables solutions sont :
$f:x\mapsto 0$ , $f:x\mapsto 1$, $f:x\mapsto \cos(\alpha x)$ (avec $\alpha>0$ ) et $f:x\mapsto \mathrm{ch}(\alpha x)$ (avec $\alpha>0$ ).

*Partie III*

1. I.3.b implique par contraposition $f(0)\neq 0$ , I.3.a donne alors $f(0)=1$ et I.3.c donne $f$ paire.
Puisque $f$ s'annule au moins une fois, que ce n'est pas en 0 et qu'elle est paire, on peut assurer que $f$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+*$ .

2.a $E$ est une partie de $\mathbb{R}$ , non vide (via III.1) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure $a$ .

2.b (1) Par l'absurde, supposons $f(a)\neq 0$ .
Par continuité en $a$ , il existe un voisinage de $a$ , de la forme $[a-\alpha,a+\alpha]$ (avec $\alpha>0$ ) sur lequel $f$ ne s'annule pas. Par suite $E$ étant minorée par $a$ , l'est aussi par $a+\alpha$ . Or $a$ est le plus grand des minorants de $E$ . Absurde.
(2) En exploitant la réalisation séquentielle d'une borne inférieure.
Il existe $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to a$ . Puisque $f$ est continue $f(x_n)\to f(a)$ .
Or $x_n\in E$ donc $f(x_n)=0$ puis par unicité de la limite $f(a)=0$ .
$a=\inf E$ , $E\subset\mathbb{R}^+*$ donc $a\in\mathbb{R}^+$ or $f(a)=0$ et $f(0)=1$ donc $a>0$ .

2.c De part la définition de $a$ , on a $\forall x\in\left]0,a\right[$ , $f(x)\neq 0$ . De plus, on sait $f(0)=1$ .
Si par l'absurde, $\exists y\in\left[0,a\right[$ tel que $f(y)\leq 0$ alors en appliquant le TVI entre 0 et $y$ , on peut affirmer que $f$ s'annule entre 0 et $y$ . Cela contredit la propriété : $\forall x\in\left]0,a\right[$ , $f(x)\neq 0$ . Absurde.

3.a Exploitons la relation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ avec $x=y=\dfrac{a}{2^{q+1}}$ .
On obtient $f\left(2\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)+1=2f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$ puis la relation voulue.

3.b Par récurrence que $q\in\mathbb{N}$ .
Pour $q=0$ : $f\left(\dfrac{a}{2^0}\right)=f(a)=0=g(a)$ .
Supposons la propriété établie au rang $q\in\mathbb{N}$ .
On a $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)+1=2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ et $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)\underset{HR}{=}g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{q+1}}\right)$ donc

$$\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{q+1}}+1\right)=\cos^2\frac{\pi}{2^{q+2}}\text{ en vertu de }1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}.$$

Sachant $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)>0$ et $\cos\dfrac{\pi}{2^{q+2}}>0$ on a $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2^{q+2}}=g\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$.
Récurrence établie.

3.c Par récurrence double sur $p\in\mathbb{N}$ , montrons que $\forall q\in\mathbb{N}$ , $f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$
Pour $p=0$ , $f(0)=1=g(0)$ .
Pour $p=1$ , $\forall q\in\mathbb{N}$ , $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$ en vertu de III.3b
Supposons la propriété vraie aux rangs $p$ et $p-1$ avec $p\geq 1$.
En exploitant la relation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

avec $x=\frac{pa}{2^q}$ et $y=\frac{a}{2^q}$ on obtient : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)+f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)=2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

Par HR : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)=2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right)-f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)=2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right)-g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$.

Or $2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right)-g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)=2\cos\frac{p\pi}{2^{q+1}}\cos\frac{\pi}{2^{q+1}}-\cos\frac{(p-1)\pi}{2^{q+1}}=\cos\frac{(p+1)\pi}{2^{q+1}}=g\left(\frac{(p+1)a}{2^{q+1}}\right)$

via la formule $2\cos x\cos y-\cos(x-y)=\cos(x+y)$.

Ainsi $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)=g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

Récurrence (double) établie.

3.d Par parité de $f$ et $g$, on peut étendre la propriété à $p\in\mathbb{Z}$.

4.a Soit $x\in\mathbb{R}$ .Posons $u_n=\frac{E\left(2^n x/a\right)a}{2^n}$. On a $u_n\in D_a$ et puisque $\frac{2^n x}{a}-1\le E\left(\frac{2^n x}{a}\right)\le\frac{2^n x}{a}$ on a aussi $x-\frac{a}{2^n}\le u_n\le x$. Par le théorème des gendarmes : $u_n\to x$.

4.b Soit $x\in\mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite d'éléments de $D_a$ telle que $u_n\to x$.

Puisque $f$ et $g$ sont continues et que $u_n\to x$ on a $f(u_n)\to f(x)$ et $g(u_n)\to g(x)$.

Or, par III.3d, on a $f(u_n)=g(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc à la limite $f(x)=g(x)$.

Finalement $f=g$.