Fonctions Réelles

Méthode de Newton

Partie I – Théorème du point fixe

Soit $a<b$ deux réels et $I=[a,b]$.

On se donne $g:I\to\mathbb{R}$ une fonction telle que :

- $\forall x\in I, g(x)\in I$,
- et il existe une constante $\exists k\in[0,1[$ pour laquelle on ait $\forall(x,y)\in I^2, |g(x)-g(y)|\le k|x-y|$.

1.a Justifier que g est continue.

1.b Montrer que l'équation $g(x)=x$ possède une solution dans l'intervalle $[a,b]$ puis que celle-ci est unique.
Nous la noterons α.

2. Soit $u\in[a,b]$ et (x_n) la suite réelle définie par :
$x_0=u$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=g(x_n)$.

2.a Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|x_n-\alpha|\le k^n|u-\alpha|$.
En déduire la limite de la suite (x_n).

2.b Etablir que pour tout $n,p\in\mathbb{N}$: $|x_{n+p}-x_n|\le\dfrac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1}-x_n|$.

2.c En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|x_n-\alpha|\le\dfrac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|$.

3. On suppose que g est dérivable en α.

3.a Etablir $|g'(\alpha)|\le k$.

3.b On reprend les notations de la question 2.
Montrer que, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\ne\alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)$.

Partie II – Méthode de Newton

On se donne deux réels $a<b$ réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que $f(a)<0$, $f(b)>0$ et que $\forall x\in[a,b], f'(x)>0$.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in[a,b]$.

1.a Montrer que cette équation possède une unique solution α appartenant à $]a,b[$.

1.b Soit $x_0\in[a,b]$.
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en x_0.

2. Pour tout $x\in[a,b]$, on pose $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2.a Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

2.b Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que f est de surcroît concave.
On considère ensuite la suite (x_n) définie par : $x_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=g(x_n)$.

3.a Montrer que la suite (x_n) est bien définie, cro[1]te et que $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in[a,\alpha]$.

3.b Etablir que $x_n\to\alpha$.

4. On revient au cas général.

4.a Justifier qu'il existe $h > 0$, tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I, |g'(x)| < 1$.

4.b Etablir que $\forall x \in I, g(x) \in I$

4.c Justifier aussi qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

4.d En déduire que $\forall u \in I$, la suite (x_n) définie par $x_0 = u$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α.

5. On reprend les notations de la question ci-dessus et on suppose de plus que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Etablir que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$.

Correction

d'après CCP PC 1997

Partie I

1.a g est k lipschitzienne donc continue.

1.b Posons $h: x \mapsto g(x) - x$ définie sur $[a,b]$.

h est continue, $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$ donc h s'annule en vertu du TVI.

Par suite l'équation $g(x) = x$ possède au moins une solution.

Notons α et β deux solutions de l'équation $g(x) = x$.

On a $|g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$ donc $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ or $k < 1$ donc $\alpha = \beta$.

Finalement l'équation $g(x) = x$ possède une solution unique.

2.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$

$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha| \underset{HR}{\leq} k^{n+1}|u - \alpha|$.

Récurrence établie.

$k \in [0,1[$ donc $k^n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $x_n \rightarrow \alpha$ par comparaison.

2.b 1ère méthode :

$|x_{n+p} - x_n| \leq |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|$,

$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$,

$|x_{n+p} - x_n| \leq k^{p-1}|x_{n+1} - x_n| + k^{p-2}|x_{n+1} - x_n| + \cdots + k^0|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1 - k^p}{1 - k}|x_{n+1} - x_n|$

2ème méthode :

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ en exploitant :

$|x_{n+p+1} - x_n| \leq |x_{n+p+1} - x_{n+p}| + |x_{n+p} - x_n| \leq k^p|x_{n+1} - x_n| + \dfrac{1 - k^p}{1 - k}|x_{n+1} - x_n|$.

2.c Quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente : $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{1}{1 - k}|x_{n+1} - x_n|$.

Or $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$ donc $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|$.

3.a $g'(\alpha) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}$ or $|g(\alpha + h) - g(\alpha)| \leq k|(\alpha + h) - \alpha| = k|h|$

donc $\left|\dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}\right| \leq k$ puis à la limite quand $h \rightarrow 0$: $|g'(\alpha)| \leq k$.

3.b $x_n \rightarrow \alpha$ et $\dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \xrightarrow[x \to \alpha]{} g'(\alpha)$ donc par composition de limite :

$\dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \dfrac{g(x_n) - g(\alpha)}{x_n - \alpha} \xrightarrow[n\infty]{} g'(\alpha)$.

Partie II

1.a f est continue, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc en vertu du TVI l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]a,b[$. D'autre part f est strictement croissante (donc injective) car $\forall x \in [a,b], f'(x) > 0$, par suite l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir plus d'une solution. Finalement l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]a,b[$.

1.b L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Cette droite coupe l'axe des abscisses ($y = 0$) en un point d'abscisse $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2.a f est f' sont $\mathcal{C}^1$ donc g l'est aussi par opérations.

2.b $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$.

3.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ montrons que x_n existe et $x_n \in [a, \alpha]$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Puisque, par HR, x_n existe et $x_n \in [a, \alpha]$, $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.
x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_n et de l'axe des abscisses.
La fonction f étant concave, sa représentation est en dessous de cette tangente, donc $f(x_{n+1}) \leq 0$ et puisque f est strictement croissante : $x_{n+1} \leq \alpha$.
D'autre part $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq x_n$ car $f(x_n) \leq 0$ et donc $x_{n+1} \geq x_n$.
Ainsi $x_{n+1} \in [x_n, \alpha] \subset [a, \alpha]$. Récurrence établie.
On a vu ci-dessus $x_{n+1} \geq x_n$, la suite (x_n) est croissante.

3.b (x_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une limite ℓ.
$x_n \in [a, \alpha]$ donne à la limite $\ell \in [a, \alpha]$.
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ donne à la limite $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ car f est $\mathcal{C}^1$. Par suite $f(\ell) = 0$ et donc $\ell = \alpha$.

4.a On a $g'(\alpha) = 0$ et g' continue car g est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque $g'(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} 0 < 1$, il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in I = [\alpha - h, \alpha + h], |g'(x)| < 1$ quitte à prendre h suffisamment petit pour que $I \subset [a, b]$.

4.b Par l'inégalité des accroissements finis :
$\forall x \in I, |g(x) - g(\alpha)| \leq 1 \times |x - \alpha|$ donc $|g(x) - \alpha| \leq h$ d'où $g(x) \in I$.

4.c $|g'|$ est continue sur le segment $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, elle y admet donc un maximum en un point $c \in I$.
Posons $k = |g'(c)|$. On a $k \in [0,1[$ car $\forall x \in I, |g'(x)| < 1$.
De plus $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g'(c)| = k$ donc l'inégalité des accroissements finis assure que g est k lipschitzienne.

4.d Les propriétés sont réunies pour exploiter la partie I et conclure.

5. Par la formule de Taylor-Young :
$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$ au voisinage de α.
Puisque $x_n \to \alpha$ on peut écrire : $g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 + o((x_n - \alpha)^2)$
i.e. : $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 + o((x_n - \alpha)^2)$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$.