Déterminants

Devoir Maison N° 16

Vendredi 27 Avril 2018

Problème 1 : Niveau 3

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :
les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi : $\Delta_1 = |a|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

2.a Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$.

2.b Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.

3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.

3.a Etablir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a-b)(a-c)\Delta_{n-2} = 0$.
On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.

3.b Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1, \ldots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :
Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \ldots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = |a_1|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$.

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$.
On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.

Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$.

1.a Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.

1.b Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.

1.c En déduire l'expression de D_n.

2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.

2.a On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Etablir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.

2.b En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.

Problème 2 : Niveau 3-4 D'après Banque PT 2001

Partie I

On note $\mathcal{B}=(1,X,\dots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère une suites de réels deux à deux distincts : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note M_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément d'indice (i,j) est a_{j-1}^{n-i+1}.

Autrement dit : $M_n=\begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On pose V_n son déterminant que nous allons calculer maintenant :

1. On introduit la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & x^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.a Justifier que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
Exprimer le coefficient λ de x^n dans $f(x)$ à l'aide de l'un des termes de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.b Justifier que $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Conclure : $\forall n\in\mathbb{N}^*, V_n=\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)$.

2. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts : $a_0,a_1,\dots,a_n$ et on considère la famille de polynômes : $\mathcal{C}=(P_k)_{0\le k\le n}$ où $P_k=(X+a_k)^n$.

2.a Former la matrice représentative de la famille $\mathcal{C}$ relative à la base $\mathcal{B}$.

2.b Etablir que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $h\in\mathbb{R}$, on définit une application T_h en posant pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$: $T_h(P)=P(X+h)$.

1.a Justifier que T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b Quel en est le déterminant ?

On désire déterminer l'ensemble E formée des endomorphismes φ de $\mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant la propriété :
$\forall h\in\mathbb{R}, \varphi\circ T_h=T_h\circ\varphi$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

3. On note D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. l'application $D:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $D:P\mapsto P'$.

3.a Etablir que $D\in E$.

3.b Justifier que $\forall k\in\{0,1,\dots,n\}$, $D^k\in E$.

3.c Etablir que la famille $(D^k)_{0\le k\le n}$ est libre.

4. Soit $\theta:E\longrightarrow\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(\varphi)=\varphi(X^n)$.

4.a Montrer que θ est une application linéaire.

4.b Etablir que θ est injective.

4.c Déterminer la dimension de E.

5. Donner une base de E.

Correction

Problème 1 : Niveau 3

Partie I

1. $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = a^2 - bc$, $\Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc$.

2.a Dans le cas $a = c$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$.

donc en développant selon la première colonne $\Delta_n = a \begin{vmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (a-b) & & a-b \end{vmatrix}_{[n-1]} = a(a-b)^{n-1}$.

En transposant, on obtient $\Delta_n = a(a-c)^{n-1}$ dans le cas $a = b$.

2.b $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}$.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$ donne

$$\Delta_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} .$$

3.a Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix}$.

En développant selon la dernière colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix} = -(b-a) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (2a-b-c) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

puis $\Delta_n = -(b-a)(c-a)\Delta_{n-2} + (2a-b-c)\Delta_{n-1}$ et la relation demandée.

3.b La suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0$. En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette équation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$ et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta_n = \lambda(a-b)^n + \mu(a-c)^n$.

Pour $n = 1$, on obtient $\lambda(a-b) + \mu(a-c) = a$ (1)

Pour $n = 2$, on obtient $\lambda(a-b)^2 + \mu(a-c)^2 = a^2 - bc$ (2)

$(a-c) \times (1) - (2)$ donne $\lambda(a-b)(b-c) = c(b-a)$ donc $\lambda = \dfrac{c}{c-b}$ et de même $\mu = \dfrac{b}{b-c}$ d'où

$$\Delta_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} .$$

Partie II

1.a En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2, \dots, C_n$. En développant alors le déterminant selon sa première colonne on obtient une somme de coefficients qui sont des fonctions affines de x multipliés par des cofacteurs qui eux ne dépendent par de x. Ainsi $D_n(x)$ apparaît comme une fonction affine de x.

1.b Pour $x=-b$, $D_n(-b)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)=\beta-\alpha b$.

Pour $x=-c$, $D_n(-c)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)=\beta-\alpha c$.

On en déduit $\alpha=\dfrac{D_n(-b)-D_n(-c)}{c-b}=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$ et

$\beta=D_n(-b)+\alpha b=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

1.c $D_n=D_n(0)=\beta=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

2.a Notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice définissant D_n. En fixant c et en faisant b, on peut percevoir $m_{i,j}$ comme une fonction de b : $b\mapsto m_{i,j}(b)$. Cette fonction est continue car soit $m_{i,j}(b)=b$, soit $m_{i,j}(b)$ ne dépend pas de b. Puisque $D_n(b)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}m_{\sigma(i),i}(b)$, $b\mapsto D_n(b)$ est continue par opération sur les fonctions continue.

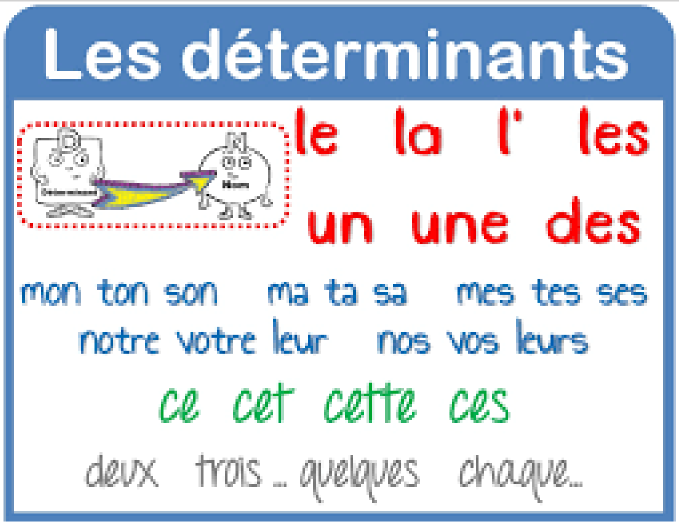
2.b Par continuité : $D_n(c)=\lim\limits_{b\to c}D_n(b)$.

Or pour $b\neq c$: $D_n(b)=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$ donc $D_n(c)=\lim\limits_{b\to c}\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

$$\frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}=\frac{(c-b+b)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c}$$

Mais $\lim\limits_{c\to b}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)$ et $\lim\limits_{b\to c}\dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\prod_{i=1}^{n}(a_j-b)\right)_{b=c}=-\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i-c)$.

Finalement, quand $b=c$: $D_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)+c\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_j-c)$.



Problème 2 : Niveau 3-4 *Partie I*

1.a En développant selon la dernière colonne : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \Delta_k$ avec Δ_k le mineur d'indice $(n+1-k,n+1)$ du déterminant définissant $f(x)$.

De part sa description, Δ_k est un constante indépendante de x. Par suite f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Le coefficient de x^n dans $f(x)$ est $(-1)^n\Delta_n$ avec $\Delta_n=V_{n-1}$. Ainsi $\lambda=(-1)^n V_{n-1}$.

1.b Les $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ annulent f car pour $x=a_i$ avec $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$, le déterminant exprimant $f(x)$ possède deux colonnes identiques. Par suite les $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c Comme $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ sont des racines deux à deux distinctes de f, on peut écrire $f(x)=g(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$ avec g une fonction polynomiale.

Or $\deg f\le n$ donc g est une fonction polynomiale constante (éventuellement nulle).

Puisque le coefficient de x^n dans f est λ, on a $f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$: $V_1=|1|=1$ et $\prod_{0\le i<j\le 1}(a_i-a_j)=1$ (car il n'y a pas de termes dans ce produit).

Supposons la propriété établie au rang $n-1\ge 1$.

Au rang n, en reprenant les notations ci-dessus :

$$V_n=f(a_n)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)=(-1)^nV_{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)\underset{HR}{=}\prod_{0\le i<j\le n-1}(a_i-a_j)\prod_{k=0}^{n-1}(a_k-a_n)=\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)$$

Récurrence établie.

2.a $P_k=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a_k^{n-i}X^i$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\begin{pmatrix} C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n\\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n\\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n\end{pmatrix}$ avec $C_n^k=\binom{n}{k}$

2.b $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\begin{vmatrix} C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n\\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n\\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n\end{vmatrix}$ donne

$$\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n\\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)\neq 0$$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on a $T_h(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+h)^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi $T_h : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$. De plus, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
$T_h(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+h) = \lambda.P(X+h) + \mu.Q(X+h) = \lambda.T_h(P) + \mu.T_h(Q)$.
Finalement T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T_h) = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & \cdots & C_n^n h^n \\ 0 & 1 & 2h & \cdots & C_n^{n-1} h^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & C_n^{n-2} h^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^0 \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{R})$ donc $\det T_h = 1$.

2. $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
$\forall h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Id} \circ T_h = T_h \circ \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Id} \in E$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in E$.
$\forall h \in \mathbb{R}$, $(\lambda\varphi + \mu\psi) \circ T_h = \lambda(\varphi \circ T_h) + \mu(\psi \circ T_h) = \lambda(T_h \circ \varphi) + \mu(T_h \circ \psi) = T_h \circ (\lambda\varphi + \mu\psi)$
et $(\varphi \circ \psi) \circ T_h = \varphi \circ T_h \circ \psi = T_h \circ (\varphi \circ \psi)$ donc $\lambda\varphi + \mu\psi \in E$ et $\varphi \circ \psi \in E$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$:
D'une part $T_h(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+h)^k$ et $D(T_h(P)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (X+h)^{k-1}$,
d'autre part $D(P) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $T_h(D(P)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (X+h)^{k-1}$,
donc $T_h \circ D = D \circ T_h$. Ainsi $D \in E$.

3.b Puisque $D \in E$ et que E est un sous-anneau : $\forall k \in \mathbb{N}, D^k \in E$.

3.c Supposons $\lambda_0.\mathrm{Id} + \lambda_1 D + \lambda_2 D^2 + \ldots + \lambda_n D^n = 0$.
i.e. $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda_0.P + \lambda_1 P' + \lambda_2 P'' + \ldots + \lambda_n P^{(n)} = 0$.
Pour $P = X^n$: $\lambda_0 X^n + n\lambda_1 X^{n-1} + n(n-1)\lambda_2 X^{n-2} + \ldots + n!\lambda_n = 0$.
Par identification des coefficients de deux polynômes égaux : $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

4.a Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in E$:
$\theta(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(X^n) = \lambda\varphi(X^n) + \mu\psi(X^n) = \lambda\theta(\varphi) + \mu\theta(\psi)$.
Donc θ est un application linéaire.

4.b Soit $\varphi \in \ker\theta$. On a $\varphi(X^n) = 0$.
Or $\varphi \in E$ donc $\forall h \in \mathbb{R}$, $\varphi((X+h)^n) = \varphi(T_h(X^n)) = T_h(\varphi(X^n)) = T_h(0) = 0$.
Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
On a vu que $((X+a_k)^n)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et part la relation ci-dessus
$\forall 0 \le k \le n, \varphi((X+a_k)^n) = 0$ donc $\varphi = 0$.
Ainsi $\ker\theta = \{0\}$. θ est injective.

4.c L'injectivité de φ implique : $\dim E \le \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
La liberté de la famille $(D^k)_{0 \le k \le n}$ implique $\dim E \ge n+1$.
Ainsi $\dim E = n+1$.

5. $(D^k)_{0 \le k \le n}$ est une famille libre formée de $n+1 = \dim E$ éléments de E, c'est donc une base de E.