

Intégration sur un segment

Devoir Maison N° 17

Vendredi 4 Mai 2018



Formules de Stirling

L'objectif de ce problème est de déterminer un équivalent simple à $n!$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie I – Une limite

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$

- 1.a Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
- 1.b Montrer que la suite (I_n) est décroissante et strictement positive.
- 1.c A l'aide d'un changement de variable adéquate, établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$.
- 2.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- 2.b En encadrant $\frac{I_{n+1}}{I_n}$, montrer que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.
- 2.c Observer que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.
- 2.d En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.
- 3.a Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de nombres factoriels.
- 3.b En observant que $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ obtenir $\pi = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{p((2p)!)^2}$.

Partie II – En encadrement

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 concave. On note $M = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$.

On introduit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine déterminée par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

1.a Exprimer, pour tout $t \in [a, b]$, $g(t)$ en fonction de a , b et f .

1.b Calculer $\int_a^b g(t) dt$.

2. Justifier par un argument géométrique, que $\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$.

3. On désire maintenant établir la propriété : $\forall t \in [a, b], f(t) - g(t) \leq M \frac{(t-a)(b-t)}{2}$

Celle-ci est clairement vérifiée pour $t = a$ ou $t = b$. Il reste à l'étudier pour $t \in]a, b[$.

Pour cela, on introduit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$ où la constante K est choisie de sorte que $h(t) = 0$.

3.a Justifier que h est de classe C^2 et exprimer $h''(x)$.

3.b En exploitant le théorème de Rolle, établir qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $h''(c) = 0$.

3.c En déduire qu'alors $|K| \leq \frac{M}{2}$ puis l'inégalité voulue.

4. Etablir alors que $\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$.

5. En appliquant le résultat précédent à la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $[n, n+1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) établir :

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Partie III – Formule de Stirling

Cette partie exploite les résultats des questions I.3.b et II.5 qui pourront, au besoin, être admis.

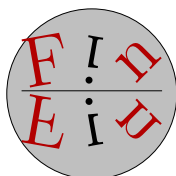
On pose pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $u_n = \ln \left(n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n} \right) - \ln n!$ et $v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On note C leur limite commune

2. En calculant de deux manières $\lim_{n \rightarrow \infty} 2u_n - u_{2n}$ montrer que $C = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

3. Conclure : $n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$.



Correction

Partie I

1.a $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}$.

1.b $\forall t \in [0, \pi/2], \sin^n t \geq 0$ et $t \mapsto \sin^n t$ n'est pas la fonction nulle donc $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt > 0$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t (\sin t - 1) dt \leq 0$ car $t \mapsto \sin^n t (\sin t - 1)$ est négative sur $[0, \pi/2]$.

Ainsi (I_n) est une suite décroissante et strictement positive.

1.c En réalisant le changement de variable $u = \pi/2 - t$:

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_{\pi/2}^0 \sin^n(\pi/2 - u)(-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n u du = J_n$.

2.a $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t dt = \left[-\cos t \sin^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^2 t \sin^n t dt$

donne $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^n t dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$

donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b $I_{n+1} \leq I_n$ donc $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

D'autre part : $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \geq \frac{n+1}{n+2}$ car $\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \geq 1$.

Ainsi $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ et en vertu du théorème des gendarmes : $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

2.c $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \frac{n+1}{n+2} I_n = (n+1)I_n I_{n+1}$. La suite de terme général $nI_n I_{n+1}$ est constante.

2.d La valeur de cette constante s'obtient en prenant $n=0$ et on obtient : $I_0 I_1 = \pi/2$.

Puisque $I_n \sim I_{n+1}$ et $\pi/2 = (n+1)I_n I_{n+1} \sim nI_n^2$ donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3.a $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} I_0$

ainsi $I_{2p} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2 \cdot 1}{[(2p)(2p-2)\dots 2]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{[2^p p(p-1)\dots 1]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} (p!)^2} \pi$

Par la même démarche : $I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$.

3.b $I_n \sim I_{n+1}$ donc $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} \sim \frac{2p I_{2p}}{2p I_{2p}} = 1$.

$\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} = \frac{(2p+1)}{2p} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \frac{1}{2^{2p+1} (p!)^2} \pi = \frac{2^{4p} (p!)^4}{p((2p)!)^2} \frac{1}{\pi}$ donc $\pi = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{p((2p)!)^2}$.

Partie II

1.a $g(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) + f(a)$.

1.b $\int_a^b g(t)dt = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^b (t-a)dt + \int_a^b f(a)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$

2. Puisque f est concave, les cordes sont en dessous les arcs.

Par suite $\forall t \in [a, b], g(t) \leq f(t)$ et donc, en intégrant : $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt.$

3.a Par opérations h est C^2 .

Puisque g est affine $g''(x) = 0$. D'autre part $((x-a)(x-b))'' = 2$ donc $h''(x) = f''(x) - 2K.$

3.b La fonction h est C^2 et s'annule en $a < t < b$.

En appliquant le théorème de Rolle à h sur les segments $[a, t]$ et $[t, b]$, h' s'annule en des points α, β tels que $a < \alpha < t < \beta < b$. En appliquant le théorème de Rolle à h' sur $[\alpha, \beta]$ on obtient une annulation de h'' en un point $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[.$

3.c $h''(c) = 0$ donne $2K = f''(c)$ puis $|2K| \leq M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et $|K| \leq \frac{M}{2}.$

$h(t) = 0$ donne $f(t) - g(t) = K(t-a)(t-b)$

donc $|f(t) - g(t)| \leq |K| |t-a| |t-b| \leq \frac{M}{2} (t-a)(b-t).$

De plus $f(t) - g(t) \geq 0$ et donc l'inégalité précédente donne celle voulue.

4. En intégrant l'inégalité précédente sur $[a, b]$:

$$\int_a^b (f(t) - g(t))dt \leq \frac{M}{2} \int_a^b (t-a)(b-t)dt$$

Or $\int_a^b (t-a)(b-t)dt = \left[\frac{1}{2}(t-a)^2(b-t) \right]_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{6}$

donc $\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \frac{M(b-a)^3}{12}.$

5. La fonction f est de classe C^2 et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Puisque $f''(x) \leq 0$, f est concave.

D'autre part, puisque $M = \sup_{[n, n+1]} |f''(x)| = \frac{1}{n^2}.$

Avec les notations qui précèdent :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_n^{n+1} \ln t dt = [t \ln t - t]_n^{n+1} = (n+1) \ln n - n \ln n - 1 \text{ et } \int_a^b g(t)dt = \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2} \text{ donc}$$

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) (\ln n + \ln(n+1)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Partie III

1. $u_{n+1} - u_n = \ln \frac{(n+1)^{\frac{n+3}{2}} e^{-(n+1)}}{n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}} - \ln \frac{(n+1)!}{n!} = (n + \frac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geq 0$ via II.2.b

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n-1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - \frac{1}{12n(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} \leq 0$$

Ainsi (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et puisque $v_n - u_n \rightarrow 0$ on peut assurer que ces suites sont adjacentes.

2. D'une part $2u_n - u_{2n} \rightarrow 2C - C = C$ et d'autre part :

$$2u_n - u_{2n} = \ln \left(\frac{n^{2n+1} e^{-2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} \right) - \ln \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n((2n)!)^2}{2^{4n+1}(n!)^4} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2\pi}.$$

Par suite $C = -\frac{1}{2} \ln(2\pi).$

3. $\ln \frac{\sqrt{2\pi} n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}}{n!} = \ln \sqrt{2\pi} + u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{\sqrt{2\pi} n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}}{n!} \rightarrow 1$ puis $n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$