Séries Numériques

Devoir Maison N° 18

Vendredi 1 Juin 2018

1. **Intégrales de Wallis.**

   Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

   (b) En déduire une expression explicite de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1}$.

   (d) En déduire la formule de Wallis :

   $$\lim_{p \to +\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. **Formule de Stirling.**

   Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. On admettra que pour toute suite (u_n) de limite nulle,

   $$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^4).$$

   (a) Montrer qu'il existe un réel α non nul qu'on déterminera tel que $S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^2}$

   (b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

   (c) En déduire que (S_n) admet une limite finie S dans $\mathbb{R}$.

   (d) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En considérant $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S.

   (e) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.

1. **Intégrales de Wallis.**

(a) Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\cdot I_{n-1}}$.

(b) On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \boxed{\dfrac{\pi}{2} = I_0}$; $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1 = I_1}$.
On a alors, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-1} = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-3} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0 \\ &\frac{(2p)!}{(2p(2p-1)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = I_{2p}}. \end{aligned}$$

On a de même, pour tout $p \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1 \\ &\frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \boxed{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = I_{2p+1}}. \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n+1} x$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\ \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_n \leqslant I_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\boxed{1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}.}$$

(d) On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$

Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement et la question (c), on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.
Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot\frac{2p^2}{2p}\cdot\pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

2. **Formule de Stirling.**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

(a) On obtient, à l'aide du développement limité de ln donné dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &= \ln \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln \frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}}$.

(b) Par un argument classique de comparaison avec une intégrale, du fait de la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Ainsi, la somme partielle $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et elle est clairement croissante. Ainsi, elle est convergente. On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il s'agit en fait d'une série de Riemann, dont la convergence sera un résultat du cours.

(c) Puisque $S_{n-1} - S_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$, par propriété de conservation du signe, $S_{n-1} - S_n$ est positif à partir d'un certain rang. Si on connaît le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, on peut conclure tout de suite à la convergence de $\sum(S_{n-1} - S_n)$, donc aussi de $\sum(S_n - S_{n-1})$. Sinon, on se ramène au TCSTP classique, en remarquant que l'équivalence ci-dessus implique l'existe d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant S_{n-1} - S_n \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(S_{n-1} - S_n)$ converge.

Or, la somme partielle de cette série est $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k - S_{k+1} = S_1 - S_{n+1}$. Ainsi, la convergence de la série est équivalente à la $\boxed{\text{convergence de la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vers un réel fini } S.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \mathrm{e}^S$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \dfrac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$. De plus : $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.

D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $\boxed{S = \ln\sqrt{2\pi}}$.

(e) La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{soit : } \quad \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)), \quad \text{soit : } \quad \boxed{n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}.$$