# Espaces Préhilbertiens

## Devoir Maison N° 19 bis

Lundi 11 Juin 2018

# Déterminant de Gram

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$

*Partie I*

1. Soit $u$ et $v$ deux vecteurs quelconques de $E$.

On notre $Gram(u,v)=\begin{pmatrix}(u|u) & (u|v)\\(v|u) & (v|v)\end{pmatrix}$ et $G(u,v)=\det(Gram(u,v))$.

Montrer que $G(u,v)\geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?

2. Soit $u,v$ et $w$ trois vecteurs quelconques de $E$.

On note $Gram(u,v,w)=\begin{pmatrix}(u|u) & (u|v) & (u|w)\\(v|u) & (v|v) & (v|w)\\(w|u) & (w|v) & (w|w)\end{pmatrix}$ et $G(u,v,w)=\det(Gram(u,v,w))$.

2.a On suppose que $w$ est orthogonal à $u$ et $v$.
Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.

2.b On suppose que $w$ est combinaison linéaire de $u$ et $v$.
Calculer $G(u,v,w)$.

2.c On suppose que $w=t+n$ avec $t$ combinaison linéaire de $u$ et $v$, et $n$ orthogonal à $u$ et $v$.

Montrer que $G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2$.

2.d Etablir l'équivalence : $(u,v,w)$ est libre $\Leftrightarrow$ $G(u,v,w)\neq 0$.

*Partie II*

Soit $u_1,\ldots,u_n$ $n$ vecteurs de $E$.
On note : $Gram(u_1,\ldots,u_n)$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont le coefficient d'indice $(i,j)$ est $(u_i|u_j)$ et $G(u_1,\ldots,u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1,\ldots,u_n)=0$.

2. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ libre. On introduit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $u_1,\ldots,u_n$ et on note $A=(a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ à la base $(u_1,\ldots,u_n)$.

2.a Exprimer $(u_i|u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice $A$.

2.b Montrer que $Gram(u_1,\ldots,u_n)={}^tAA$. En déduire que $G(u_1,\ldots,u_n)>0$.

3. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $F$.

On appelle distance de $x$ vecteur de $E$ au sous-espace vectoriel $F$ le réel : $d(x,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|$.

3.a En écrivant $x=x_F+n$ avec $x_F\in F$ et $n\in F^{\perp}$, démontrer que $d(x,F)=\|n\|$.

3.b Etablir : $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\ldots,e_p,x)}{G(e_1,\ldots,e_p)}}$.

*Partie III*

1. Pour tout polynôme $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Désormais, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $(P\,|\,Q)$ au lieu de $\varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux éléments $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}[X]$.

2.a On désire calculer $d=\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1 (t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$.

Interpréter $d$ à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $E$ à préciser.

2.b Calculer les déterminants $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}$.

2.c Donner la valeur de $d$.

*Partie IV*

Soit $p$ un entier naturel non nul et $a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p$ des réels tels que pour tout $i\in\{1,\ldots,p\}$, $a_i>0$, $b_i\geq 0$ et pour tout $i\neq j\in\{1,\ldots,p\}$, $b_i\neq b_j$.

Le but de cette partie est de calculer le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq p}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_p}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_p+b_1} & \frac{1}{a_p+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_p}\end{pmatrix}\in M_p(\mathbb{R}).$$

Ce déterminant sera noté $C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)$.

1. Soit $F(X)=\dfrac{(X-a_1)\cdots(X-a_{p-1})}{(X+b_1)\cdots(X+b_p)}$.

   Réaliser la décomposition en éléments simples de $F$.

2. On note $D$ le déterminant d'ordre $p$ :

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$

   En calculant $D$ de deux façons, établir :

$$F(a_p)C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p).$$

3. En déduire : $C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)=\dfrac{\prod_{1\le i<j\le p}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le p}(a_i+b_j)}$.

4.a Calculer $\Delta_p=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{pmatrix}\in M_p(\mathbb{R})$.

   On pourra se contenter d'une expression comportant un ou plusieurs $\prod(\dots)$.

4.b En déduire la valeur de $u_n=\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n}\int_0^1\left(t^n-(a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0\right)^2\mathrm{d}t$.

   On exprimera le résultat à l'aire de nombres factoriels.

4.c Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

Fin

## *Partie I*

1. $G(u,v)=\|u\|^2\|v\|^2-(u\,|\,v)^2\geq 0$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il y a égalité ssi $u$ et $v$ sont colinéaires.

2.a Si $w\in\{u,v\}^{\perp}$ alors $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & 0\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & 0\\ 0 & 0 & (w\,|\,w)\end{vmatrix}=G(u,v)\|w\|^2$.

2.b Si $w=\lambda u+\mu v$ alors en notant $C_1,C_2,C_3$ les colonnes de $Gram(u,v,w)$ on a $C_3=\lambda C_1+\mu C_2$ donc $G(u,v,w)=0$.

2.c $$G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & (u\,|\,t)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & (v\,|\,t)\\ (w\,|\,t) & (w\,|\,t) & (n\,|\,n)+(t\,|\,t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & 0\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & 0\\ (w\,|\,t) & (w\,|\,t) & (n\,|\,n)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & (u\,|\,t)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & (v\,|\,t)\\ (w\,|\,t) & (w\,|\,t) & (t\,|\,t)\end{vmatrix}$$
$$=G(u,v)\|n\|^2+G(u,v,t)=G(u,v)\|n\|^2$$

2.d Si $(u,v,w)$ est libre alors $(u,v)$ est libre et $w\notin \mathrm{Vect}(u,v)$ donc $G(u,v)\neq 0$ et $n\neq 0$ puis
$G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2\neq 0$.
Si $G(u,v,w)=0$ alors $G(u,v)=0$ ou $n=0$ donc $(u,v)$ liée ou $w\in\mathrm{Vect}(u,v)$ puis $(u,v,w)$ libre.

## *Partie II*

1. Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $Gram(u_1,\dots,u_n)$.
Si $(u_1,\dots,u_n)$ est liée alors $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ telle que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0$ et par suite
$\lambda_1C_1+\cdots+\lambda_nC_n=0$ et donc $G(u_1,\dots,u_n)=0$.

2.a $u_j=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}e_k$ donc $(u_i\,|\,u_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}e_k\,\middle|\,\sum_{\ell=1}^{n}a_{\ell,j}e_\ell\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,j}$.

2.b $A=(a_{i,j})$, ${}^tA=(a'_{j,i})$ avec $a'_{j,i}=a_{i,j}$. ${}^tAA=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a'_{i,k}a_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,j}=(u_i\,|\,u_j)$ donc
${}^tAA=Gram(u_1,\dots,u_n)$. $G(u_1,\dots,u_n)=\det{}^tAA=(\det A)^2>0$ car $A$ est inversible.

3.a $\forall y\in F$ , $\|x-y\|^2=\|x-x_F+x_F-y\|^2=\|x-x_F\|^2+\|x_F-y\|^2$ car $x-x_F=n\in F^{\perp}$ et $x_F-y\in F$ .

Par suite $\|x-y\|^2\geq\|x-x_F\|^2$ et donc $d(x,F)\geq\|x-x_F\|=\|n\|$.

De plus pour $y=x_F\in F$ , $\|x-y\|=\|n\|$ donc $d(x,F)\leq\|n\|$ et finalement $d(x,F)=\|n\|$.

3.b En décomposant la dernière colonne :

$$G(e_1,\dots,e_p,x)=\begin{vmatrix}(e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_p) & (e_1|x_F)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p|e_1) & \cdots & (e_p|e_p) & (e_p|x_F)\\ (x_F|e_1) & \cdots & (x_F|e_p) & (x_F|x_F)+\|n\|^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_p) & (e_1|x_F)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p|e_1) & \cdots & (e_p|e_p) & (e_p|x_F)\\ (x_F|e_1) & \cdots & (x_F|e_p) & (x_F|x_F)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_p) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p|e_1) & \cdots & (e_p|e_p) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \|n\|^2\end{vmatrix}$$

$$=G(e_1,\dots,e_p,x_F)+\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)=0+\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)=\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)$$

donc $d(x,F)=\|n\|=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\dots,e_p,x)}{G(e_1,\dots,e_p)}}$ .

## *Partie III*

1. $\varphi$ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

$\varphi(P,P)=\int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t\geq 0$ car $P(t)^2\geq 0$ et $0\leq 1$ .

Si $\varphi(P,P)=0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive : $\forall t\in[0,1],P(t)^2=0$ puis $P(t)=0$ . Ainsi le polynôme $P$ possède une infinité de racines et donc $P=0$ .

2.a $d=d\left(X^2,\mathbb{R}_1[X]\right)^2$ .

2.b $\begin{vmatrix}1 & \frac12\\ \frac12 & \frac13\end{vmatrix}=\frac13-\frac14=\frac1{12}$ , $\begin{vmatrix}1 & \frac12 & \frac13\\ \frac12 & \frac13 & \frac14\\ \frac13 & \frac14 & \frac15\end{vmatrix}=\left(\frac1{15}-\frac1{16}\right)-\frac12\left(\frac1{10}-\frac1{12}\right)+\frac13\left(\frac18-\frac19\right)=\frac1{2160}$ .

3. Via II.3.b : $d=\dfrac{G(1,X,X^2)}{G(1,X)}=\dfrac{1/2160}{1/12}=\dfrac1{180}$ .

*Partie IV*

1. $\deg F=-1$ donc la partie entière de $F$ est nulle.
$F$ admet $p$ pôles simples qui sont les $-b_i$. La DES de $F$ est de la forme :
$$F(X)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_j}{(X+b_j)} \text{ avec } \lambda_j=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p}\frac{a_i+b_j}{b_j-b_i}.$$

2. $F(a_1)=\dots=F(a_{p-1})=0$ donc en développant selon la dernière colonne :
$D=F(a_p)C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})$.
D'autre part, via $C_p\leftarrow C_p-\left(\lambda_1C_1+\dots+\lambda_{p-1}C_{p-1}\right)$, $D=\lambda_pC_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$.
d'où l'égalité proposée.

3. Raisonnons par récurrence sur $p\geq 1$.
Pour $p=1$ : $C_1(a_1,b_1)=\dfrac{1}{a_1+b_1}$ ce qui correspond à la formule proposée (sachant qu'un produit sur le vide vaut 1.)
Supposons la propriété établie au rang $p-1\geq 1$.
Au rang $p$ : $C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)=\dfrac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}F(a_p)C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})$ avec
$F(a_p)=\dfrac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_p-a_i)}{\prod_{i=1}^{p}(a_p+b_i)}$ et par HR : $C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})=\dfrac{\prod_{1\le i<j\le p-1}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le p-1}(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le p-1}(a_i+b_j)}$ donc
$C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)=\dfrac{\prod_{1\le i<j\le p}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le p}(a_i+b_j)}$. Récurrence établie.

4.a Pour $a_i=i$ et $b_i=i-1$.
$$\Delta_p=C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) \text{ donc } \Delta_p=\frac{\prod_{1\le i<j\le p}(j-i)^2}{\prod_{1\le i,j\le p}(i+j-1)}.$$
On peut aussi écrire $\Delta_p=\dfrac{(1!2!\dots(p-1)!)^3}{p!(p+1)!\dots(2p-1)!}$ mais cela n'est pas demandé.

4.b Comme dans la partie III, $u_n=d(X^n,\mathbb{R}_{n-1}[X])^2=\dfrac{G(1,X,\dots,X^n)}{G(1,X,\dots,X^{n-1})}=\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.
$$\text{Par suite } u_n=\frac{\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)^2}{\left(\prod_{i=1}^{n}(i+n)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(n+j)\right)(2n+1)}=\frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

4.c $0\leq u_n\leq\dfrac{1\times\dots\times n}{(n+1)\times\dots\times(2n)}\dfrac{1\times\dots\times n}{(n+1)\times\dots\times(2n)}\dfrac{1}{2n+1}\leq\dfrac{1}{2n+1}\to 0$ donc $u_n\to 0$.