Lundi 25 Septembre 2017

Calcul Algébrique

Leonardo Fibonacci (1175-1250)

Mathématicien italien surnommé aussi « Léonard de Pise » ou « Leonardo Bigollo » (« voyageur » en italien). Son éducation s'est faite en grande partie en Algérie, où son père était le représentant des marchands de la république de Pise. Ayant voyagé en Égypte, en Syrie pour le compte de son père, Fibonacci en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique. Il prouva que toute fraction a/b pouvait se noter comme une somme de fractions distinctes dont le numérateur est 1, soit, pouvait être représentée par une fraction égyptienne.

EXERCICE 1 : Inégalité

Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$, $2n$ nombres réels. On pose

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

1. Étant donné $x \in \mathbf{R}$, exprimez $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$ en fonction de x, A, B et C.

2. En considérant le discriminant de $P(x)$, montrez que $C^2 \leqslant A \times B$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

3. Montrez que si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

EXERCICE 2 : Partie entière d'un réel

1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

2. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, la partie entière de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

Corrigé

© St Brieuc

EXERCICE 1

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$, $2n$ nombres réels. On pose

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. D'après l'**identité remarquable kivabien**,

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left[a_k x + b_k\right]^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2\right] \\ &= x^2 \times \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \times \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= A\,x^2 + 2\,Cx + B \end{aligned}$$

on utilise ici les propriétés de distributivités pour les sommes finies

Sous cette forme, il apparait plus clairement que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. ▲

2. Une remarque préliminaire s'impose. Lorsque A est nul, P n'est pas un polynôme de degré 2 : difficile en ce cas de parler de discriminant. D'où la discussion suivante :

- si $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ est nul, alors tous les termes de la liste $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont nuls. En ce cas, C est aussi nul et par conséquent : $C^2 = A \times B = 0$.
- si A n'est pas nul, en ce cas le polynôme P est de degré 2.
  D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_k x + b_k\right]^2$ est positif, il ne saurait avoir deux racines distinctes. Par conséquent, son discriminant Δ est nécessairement négatif ou nul. Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = A\,x^2 + 2\,Cx + B$, il vient $0 \geqslant \Delta = 4C^2 - 4A \times B$, d'où l'on tire

  $$C^2 \leqslant A \times B.$$

  si P a deux racines distinctes, il doit nécessairement changer de signe et donc être strictement négatif pour certaines valeurs de x

  Intéressons-nous à présent au cas d'égalité : $A \times B = C^2$. Il s'agit, d'après ce qui précède du cas particulier où P admet une racine double : x_0. En ce cas,

  $$P(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_k x_0 + b_k\right]^2$$

  Chacun des termes de cette somme étant positif, ceci revient à dire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k x_0 + b_k = 0$, c'est-à-dire que les suites $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont proportionnelles.

  pour tout $k \in \{1, .., n\}$, on a

  $$b_k = -x_0 a_k$$

Finalement, nous avons établi l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.\right]^2 \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right] \times \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]}$$

avec égalité *si et seulement si* les suites $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont proportionnelles. ▲

3. Soit $a_1, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs. On cherche à obtenir une inégalité analogue à celle établie précédemment, puisqu'on souhaite là encore majorer un carré par un produit. Pour ce faire, il suffit d'appliquer le résultat précédent à deux suites choisies astucieusement : posons pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\alpha_k = \sqrt{a_k} \text{ et } \beta_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2,$$

ce qui revient précisément à :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$$

▲

EXERCICE 2

1. Soit $k \in \mathbf{N}^\star$, on a ✎

$$\begin{aligned} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ \sqrt{k} - \sqrt{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \end{aligned}$$

✎ *On multiplie et on divise par l'expression conjuguée, pour utiliser* **l'identité géométrique** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Comme $\sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$, il s'ensuit que

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

2. Sommons terme à terme ces encadrements pour $1 \leqslant k \leqslant n^2$, il vient par **télescopage** : $\sqrt{n^2+1} - 1 < S_n < \sqrt{n^2} - 0$, soit $\sqrt{n^2+1} - 1 < S_n < n - 1$. Pour conclure, vérifions que $\sqrt{n^2+1} - 1 \geqslant n - 2$. Pour $n = 1$ l'inégalité est évidente, pour $n \geqslant 2$, raisonnons par équivalences :✎

✎ *Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés !*

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1} - 1 \geqslant n - 2 &\iff \sqrt{n^2+1} \geqslant n - 1 \iff n^2 + 1 \geqslant (n-1)^2 \\ &\iff n^2 + 1 \geqslant n^2 - 2n + 1 \iff 0 \geqslant -2n \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée, on a bien montré que $\sqrt{n^2+1} - 1 \geqslant n - 2$. Finalement, S_n vérifie l'encadrement

$$n - 2 \leqslant \sqrt{n^2+1} < S_n < n - 1$$

On peut donc en conclure que $\lfloor S_n \rfloor = n - 2$. ▲

Fin