Devoir Maison

# Fonctions Réelles

## Limites-Continuité-Dérivation

Mercredi 03 Janvier 2018

## PROBLÈME 1 : Théorèmes classiques et applications

### Partie I. Théorème de Rolle

1. **COURS —.** Énoncez le théorème de Rolle.
2. Soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b[$. On suppose que $g(a) = g(b) = 0$ et $g'(a) = 0$. Montrez qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(c)}{c-a}$.

### Partie II. Théorème des Accroissements Finis

1. **COURS —.** Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Énoncez l'égalité des accroissements finis entre $a$ et $b$.
2. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dans $\mathbf{R}^+$. On suppose en outre que $f'$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f'(x) \geqslant 0$.
   **a.** Montrez que $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.
   **b.** Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(k)$. Montrez que $(s_n)$ est convergente *si et seulement si* $f$ a une limite réelle, notée $\ell$, en $+\infty$.
   **c. Application :** étudiez les suites définies par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

### Partie III. Formule de Taylor pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbf{R}$, un réel fixé. On définit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = g(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k)}(x) + C\, \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } C \text{ est un réel fixé.}$$

1. Montrez que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi'(x) = -\dfrac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + C\right]$.
2. **Formule de Taylor** Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel fixé. En choisissant «*judicieusement*» la constante $C$, montrez l'existence d'un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que

$$g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, g^{(n+1)}(c)$$

3. **Application :** soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f$ et $f''$ sont bornées et on pose $M_0 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f''|$.
   **a.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrez que pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a
   - $-f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} M_2$
   - $f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} M_2$

**Indication :** appliquez la formule de Taylor ci-dessus entre $x$ et $x+h$ d'une part, et $x$ et $x-h$ d'autre part.

**b.** Déduisez-en que $f'$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et que si l'on note $M_1 = \sup_{\mathbf{R}} |f'|$, on a $M_1^2 \leqslant 2\, M_0 M_2$.

## EXERCICE 1 : Suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 \in [0,1] \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}} \end{cases}$$

On note $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1],\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$$

**1.** Étudiez les variations de $f$ et donner son graphe. En déduire que la suite $(u_n)$ est bien définie.

**2.** Étudiez sur $[0,1]$ le signe de la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$.
**Indication :** vous pourrez remarquer que le signe de $h(x)$ est le même que celui de $(1-x)^2 - x(1-x)$.

**3.** Quelles sont les limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ?

**4.** On suppose que $u_0 \in ]\frac{1}{2}, 1[$. Montrez que la suite $(u_n)$ converge et précisez la valeur de sa limite.

**5.** Montrez que pour tout $u_0 \in [0,1]$, la suite $(u_n)$ converge et précisez la valeur de sa limite en fonction de $u_0$.