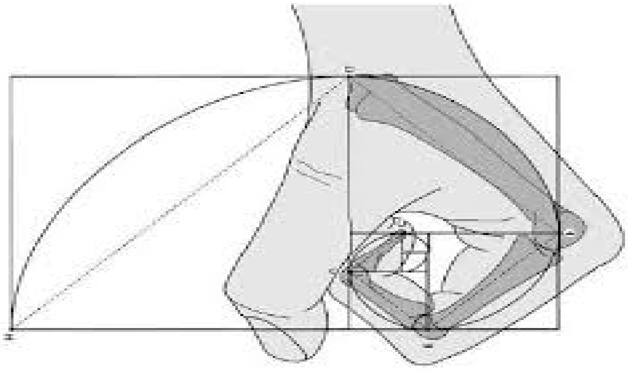
Logie
Devoir Maison N° 1

Pour Lundi 17 Septembre 2018



On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les relations

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \text{et } \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Les F_n sont des nombres entiers naturels appelés **nombres de Fibonacci**.

1. Montrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^\star$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Déduisez-en que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Montrez que pour tout couple $(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$, $F_{n+p} = F_pF_{n+1} + F_{p-1}F_n$. Déduisez-en que

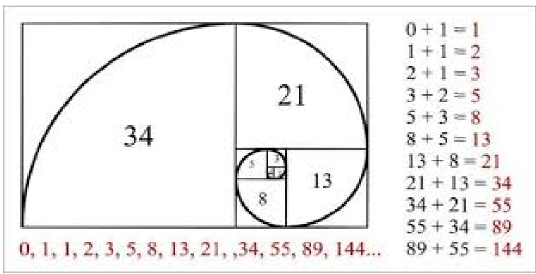
$$PGCD(F_n, F_p) = PGCD(F_{n+p}, F_p)$$

3. Démontrez finalement,

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2, \quad PGCD(F_n, F_p) = F_{PGCD(n,p)}$$

Indication : Ecrire n=pq+r et montrer que PGCD(F_n,F_p)=PGCD(F_p,F_r)

4. En déduire que F_n divise F_m si et seulement si n divise m



Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par les relations $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

- **Initialisation :** pour $n = 1$, on a $F_2 \times F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Utilisons les relations $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Il vient

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= [F_{n+1} + F_n] \times F_n - [F_n + F_{n-1}] \times F_{n+1} \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

En particulier, en posant pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $U_n = (-1)^n F_{n-1}$, on a obtenu les relations

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad U_{n+1}F_n + U_nF_{n+1} = 1.$$

Le **Théorème de Bezout** permet alors de conclure que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^\star$, les nombres de Fibonacci F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Notons pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{P}(n) \qquad \forall p \in \mathbf{N}^\star, \qquad F_{n+p} = F_pF_{n+1} + F_{p-1}F_n$$

On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{P}(n)$.

- **Initialisation :** lorsque $n = 0$, on a bien pour tout entier $p \in \mathbf{N}^\star$ $F_p = F_p \times F_1 + F_0F_{p-1}$ puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Considérons un entier $p \in \mathbf{N}^\star$. *A fortiori* $p+1$ est un entier naturel non nul et l'hypothèse de récurrence – qui est en l'occurrence une hypothèse de type universel – appliquée à $p+1$, donne :

$$\begin{aligned} F_{(n+1)+p} &= F_{n+(p+1)} = F_{p+1}F_{n+1} + F_pF_n \\ &= [F_p + F_{p-1}]F_{n+1} + F_pF_n \\ &= F_p \times [F_n + F_{n+1}] + F_{p-1} \times F_{n+1} \\ & \quad F\ F \qquad + F_{p-1}F_{n+1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** par récurrence sur n, on a montré que

Soit $(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$. On sait que $F_{n+p} = F_pF_{n+1} + F_{p-1}F_n$ et on montre que $PGCD(F_n, F_p) = PGCD(F_{n+p}, F_p)$. Pour ce faire, on vérifie, par double-inclusion que $\mathcal{D}(F_n, F_p) = \mathcal{D}(F_{n+p}, F_p)$.

$\boxed{\subset}$ si d divise à la fois F_n et F_p, d'après la relation précédente il divise aussi $F_{n+p} = F_pF_{n+1} + F_{p-1}F_n$. D'où l'on tire que $d \in \mathcal{D}(F_{n+p}, F_p)$.

$\boxed{\supset}$ si d divise F_p et F_{n+p}. Alors, d'une part d divise aussi $F_{p-1}F_n = F_{n+p} - F_pF_{n+1}$. D'autre part, d divise F_p tandis que F_p et F_{p-1} sont premiers entre eux (d'après la première question), donc d et F_{p-1} sont aussi premiers entre eux. Finalement, d'après le **théorème de Gauss** on peut conclure que d doit diviser F_n. Il s'agit donc bien d'un diviseur commun à F_p et F_n.

Par double-inclusion, on a bien établi que $\mathcal{D}(F_n, F_p) = \mathcal{D}(F_{n+p}, F_p)$. En particulier, ces ensembles ont donc même plus grand élément : $PGCD(F_n, F_p) = PGCD(F_{n+p}, F_p)$

3. Soit $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ un couple d'entiers non tous les deux nuls. On suppose sans perte de généralité que $n \neq 0$. Effectuons la division euclidienne de m par n. On a

$$m = nq + r,\ \text{où } 0 \le r \le n-1$$

En itérant le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} PGCD(F_n, F_r) &= PGCD(F_n, F_{r+n}) = \cdots = PGCD(F_n, F_{r+nq}) \\ &= PGCD(F_n, F_m) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout couple d'entiers naturels non nuls, on a

$$PGCD(F_m, F_n) = PGCD(F_n, F_r),$$

où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

Finalement, on conclut à l'aide de l'algorithme d'Euclide pour le calcul de $d = PGCD(m,n)$: si $a_0 \ge a_1 > \cdots > a_m = d > 0$ est la suite des restes non nuls successivement apparus, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} PGCD(F_m, F_n) &= PGCD(F_{a_0}, F_{a_1}) \\ &= PGCD(F_{a_1}, F_{a_2}) \\ &\ \vdots \\ &= PGCD(F_{a_m}, 0) = F_{PGCD(m,n)} \end{aligned}$$