

Devoir Maison N°10

Développements Limités

Corrigé

Exercice 1 Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par

$$f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$$

i.e $f(x)$ est égal à $x+1$ élevé à la puissance $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .

Solution. $f(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} \ln(x+1)\right)$ est défini si $x \geq -1$ et si $x \neq 0$ ($\ln(x+1)$ est défini ssi $x > -1$, $\sqrt{x+1}$ est défini ssi $x \geq -1$ et on exclue la valeur 0 pour la division)

$$D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

■

2. Déterminer la limite de f en $x = -1$.

Peut-on prolonger f par continuité en -1 ?

Solution. Posons $x = -1 + h$, avec $h \rightarrow 0$. On a $f(-1 + h) = \exp\left(\frac{\sqrt{h}}{h+1} \ln(h)\right)$

Puisque $\sqrt{h} \ln(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, (croissances comparées), on a (par continuité de l'exponentielle en $x = 0$) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \exp(0) = 1$

On pose donc $f(-1) = 1$, la fonction est alors continue en $x = -1$

Remarque : On peut toujours prolonger une fonction en donnant un sens à $f(-1)$, en revanche il est plus difficile d'obtenir un prolongement continu. ■

3. Si vous avez répondu oui à la question précédente, le prolongement obtenu est-il dérivable en -1 ?

La courbe représentative (C_f) de f admet-elle une tangente en $x = -1$?

Solution. On a

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{h}}{h+1} \ln(h)\right) - 1}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h+1} \ln(h)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(h)}{\sqrt{h}} \rightarrow -\infty$$

La fonction prolongée n'est pas dérivable en $x = -1$ mais admet une tangente verticale. ■

4. Déterminer un développement limité de f en $x = 0$ à l'ordre 2.

Solution. Attention, piège. La présence du $\frac{1}{x}$ oblige à partir d'un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3, qui donne ensuite un DL à l'ordre 2 de $\frac{\ln(x+1)}{x}$.

L'erreur la plus fréquente consiste à faire un DL₃ de $\sqrt{x+1}$, de le diviser par x , on obtient alors $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Si l'on multiplie ce DL par celui, à l'ordre 2, de $\ln(1+x)$,

le résultat est un DL₁. En effet, on est amené à faire le produit $\frac{1}{x} \times o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x)$. Cela

ne contredit pas le cours, qui spécifie qu'il faut avoir deux DL_2 pour obtenir un DL_2 . Ici, $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ n'est pas un DL !

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} \frac{\ln(x+1)}{x} &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

Puis par composition

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

donc

$$\begin{aligned} \exp\left(\sqrt{x+1} \frac{\ln(x+1)}{x}\right) &= \exp\left(1 - \frac{x^2}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= e \times \exp\left(-\frac{x^2}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= e \times \left(1 - \frac{x^2}{24}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= e - \frac{ex^4}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

■

5. En déduire que f est prolongeable par continuité en $x = 0$ et que ce prolongement est dérivable en 0 .

Préciser la valeur de la dérivée et la position de (C_f) par rapport à la tangente en $x = 0$.

Solution. D'après le cours, si on pose $f(0) = e$ la fonction est continue en 0 , dérivable de dérivée $f'(0) = 0$

L'équation de la tangente est $y_T = 1$ (elle est horizontale). On a $f(x) - y_T \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{ex^2}{24} < 0$. La courbe est sous sa tangente en 0 . ■

6. Déterminer la limite de f en $+\infty$
Y-a-t il une asymptote en $+\infty$?

Solution. D'après les croissances comparées

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x} \ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \rightarrow 0^+$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1^+$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$. ■

7. Sur quel ensemble la fonction f éventuellement prolongée est-elle continue.
Même question pour la dérivabilité.

Solution. f est maintenant définie et continue sur $[-1, +\infty[$ dérivable sur $] -1, +\infty[$.

En effet elle est clairement de classe C^∞ sur D_f . On l'a ensuite prolongé par continuité en -1 et en 0 , mais seul en 0 le prolongement obtenu est dérivable. ■

8. Déterminer la dérivée de f éventuellement prolongée ainsi que son signe.

Solution. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(f(x)) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} \ln(x+1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x \ln(x+1) + 2 \ln(x+1) - 2x}{\sqrt{(x+1)}x^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x+2) \left(\ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} \right)}{\sqrt{(x+1)}x^2} \end{aligned}$$

On étudie

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$$

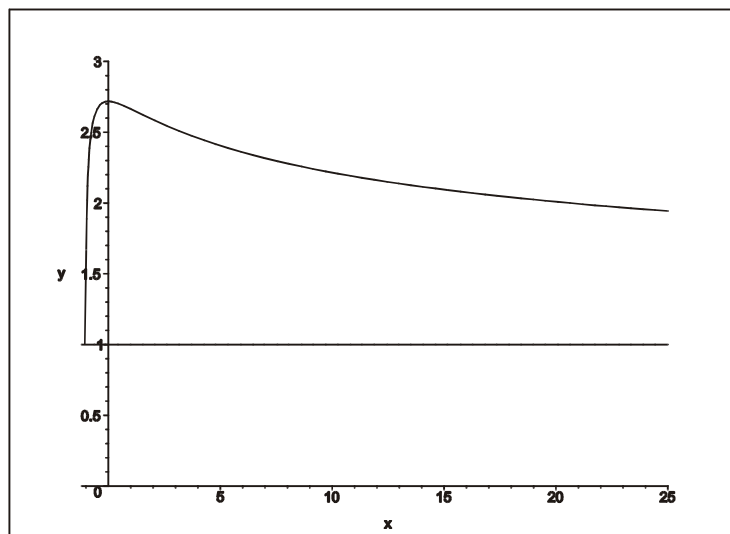
dérivable sur $]-1, +\infty[$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} \right) \\ &= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque $g(0) = 0$ on a le signe de f'

■

9. Tracer la courbe (C_f) .



Remarque : cela ne se voit pas mais la limite en $+\infty$ est bien 1 !

Exercice 2 On pose $f(x) = \sqrt{x(x+2)} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f .

Solution. f est définie si $x \neq 0$ et si $x(x+2) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$ ■

2. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

Solution. Posons $x = \frac{1}{h}$ avec $h \rightarrow 0^+$. Alors

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x(x+2)}{x^2}} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

car $\sqrt{x^2} = x$ si $x > 0$. D'où

$$f(x) = \sqrt{h \left(\frac{1}{h} + 2 \right)} e^h = \sqrt{1 + 2h} e^h$$

On fait ensuite le produit des développements limités de $\sqrt{1 + 2h} = 1 + h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$ et de $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ pour obtenir

$$\sqrt{1 + 2h} e^h = 1 + 2h + h^2 + o(h^2)$$

On revient à la variable initiale

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

■

3. La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation et la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.

Solution. On déduit de la question précédente que

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

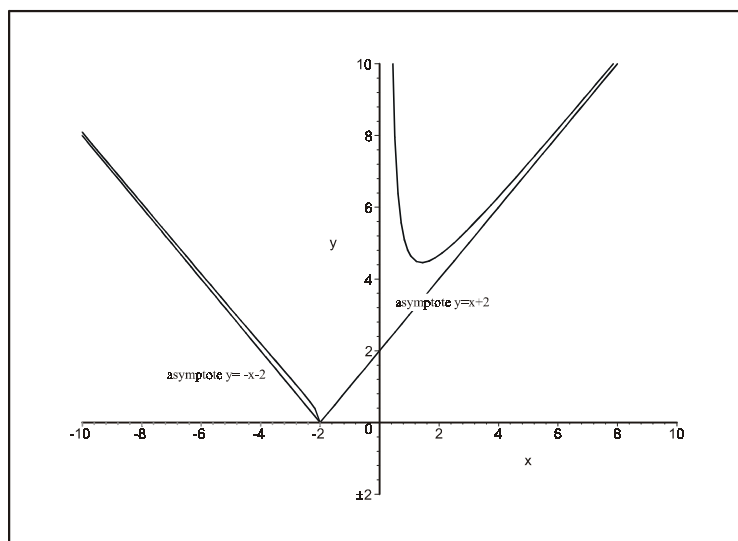
Ainsi la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote, la courbe est localement au dessus de l'asymptote (cf cours) ■

4. Mêmes questions en $-\infty$.

Solution. Même genre de technique, mais $x = -\sqrt{x^2}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= -\sqrt{\frac{x(x+2)}{x^2}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote et la courbe est encore au dessus.



■