Corrigé

Le problème .

1. (a) En posant $z=1$, on a $\tilde{P}_n(2)=2$ donc P_n n'est pas le polynôme nul.

   On notera alors d_n le degré du polynôme P_n et on notera $P_n=\sum\limits_{k=0}^{d_n} a_{n,k}X^k$.

   (b) $P_n(X+\frac{1}{X})=\sum\limits_{k=0}^{d_n} a_{n,k}(X+\frac{1}{X})^k=\sum\limits_{k=0}^{d_n} a_{n,k}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^{2i-k}$. Donc $Q_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{d_n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{n,k}\binom{k}{i}X^{2i+(d_n-k)}$. Comme $k\leq d_n$, les puissances de X sont positives donc Q_n est bien un polynôme. De plus, comme $i\leq k$, le terme de plus haut degré est atteint pour $i=k=d_n$ et la puissance vaut $2d_n$ d'où le résultat.

   (c) Remarquons que, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\tilde{Q}_n(z)=z^{d_n}\tilde{P}_n(z+\frac{1}{z})=z^{n+d_n}+z^{d_n-n}$. On a 2 polyn omes qui, évalués en tout z, sont égaux donc d'après la question 2 du préliminaire, $X^{d_n}P_n(X+\frac{1}{X})=X^{d_n+n}+X^{d_n-n}$.

   (d) Comme les deux polynômes sont égaux, ils ont les mêmes degrés donc $2d_n=d_n+n$ donc $d_n=n$.

   (e) Supposons qu'il y ait un autre polynôme, R_n. D'après la formule d'Euler, pour tout $\theta\in[0;\pi]$, $\tilde{P}_n(2\cos(\theta))=\tilde{P}_n(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}})=e^{in\theta}+\frac{1}{e^{in\theta}}=\tilde{R}_n(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}})=\tilde{R}_n(2\cos(\theta))$. Or $\theta\mapsto 2\cos(\theta)$ est une bijection sur $[-2;2]$ donc P_n-R_n possède une infinité de racines (tous les réels de $[-2;2]$.) donc, d'après le préliminaire, $P_n=R_n$ donc, si P_n existe alors il est unique.

2. — P_0 est constant d'après la question d et $P_0(z+\frac{1}{z})=2$ donc $P_0=2$.
   — P_1 est de degré 1 donc $P_1(X)=aX+b$ et pour que la formule marche, il faut $a=1$ et $c=0$ donc $P_1(X)=X$.

3. $(X+\frac{1}{X})^2-2=X^2+2+\frac{1}{X^2}-2=X^2+\frac{1}{X^2}$ donc par unicité, $P_2(X)=X^2-2$.

4. D'après tout ce qui a été fait avant, il suffit de montrer que P_{n+2} et $XP_{n+1}-P_n$ coïncident en tout $z+\frac{1}{z}$ pour $z\in\mathbb{C}^*$. $P_{n+2}(X+\frac{1}{X})=X^{n+2}+\frac{1}{X^{n+2}}$ et $(X+\frac{1}{X})P_{n+1}(X+\frac{1}{X})-P_n(X+\frac{1}{X})$
   $=(X+\frac{1}{X})(X^{n+1}+\frac{1}{X^{n+1}})-(X^n+\frac{1}{X^n})=X^{n+2}+X^n+\frac{1}{X^n}+\frac{1}{X^{n+2}}-(X^n+\frac{1}{X^n})=X^{n+2}+\frac{1}{X^{n+2}}$ d'où le résultat.

5. $P_3=XP_2-P_1=X^3-2X-X=X^3-3X$.

6. On conjecture que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant est 1. On le montre facilement par récurrence :
   — $P_1(X)=X$ et le résultat est bon.
   — Soit $n\geq 2$ tel que le coefficient dominant de P_n est 1. Montrons le pour $n+1$: $P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}$, le degré de XP_n est $n+1$ et son coefficient dominant est 1, le degré de P_{n-1} est $n-1$ donc par somme, le coefficient domiant de P_{n+1} est 1. CQFD.

7. Pour $n\in\mathbb{N}$, on conjecture que la parité de $\tilde{P}_n$ est la même que n. On montre ce résultat par récurrence forte (double) :
   — $P_0(X)=2$, $\tilde{P}_0$ est bien paire et le résultat est bon.
   — $P_1(X)=X$, $\tilde{P}_1$ est impaire donc le résultat est bon aussi.
   — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k\leq n$, $\tilde{P}_k$ est de même parité que k. Montrons le pour $n+1$:
   Si n est pair, alors $\tilde{P}_n$ est paire donc $x\tilde{P}_n$ est impair. $\tilde{P}_{n-1}$ est impaire. Par différence, $\tilde{P}_{n+1}$ est impair tout comme $n+1$.
   Si n est impair, on montre de même que $\tilde{P}_{n+1}$ est paire. CQFD.

8. Comme $P_{n+2}=XP_{n+1}-P_n$, si on note u_n le coefficient constant de P_n alors on a $u_0=2$, $u_1=0$ et $u_{n+2}=-u_n$ donc, d'après le préliminaire, pour tout n, $u_{2n+1}=0$ et $u_{2n}=2(-1)^n$.

9. (a) $z^n+\frac{1}{z^n}=0\Rightarrow z^{2n}=-1$ donc en passant au module, $|z|^{2n}=1$ donc $|z|=1$.

   (b) D'après la question précédente, si z est solution alors $|z|=1$ donc il existe θ tel que $z=e^{i\theta}$. Donc, par la formule de Moivre, on obtient $\cos(n\theta)=0$ donc $\theta=\frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$ donc $z=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

   (c) On en déduit que $\tilde{P}_n(2\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}))=\tilde{P}_n(e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}+\frac{1}{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}})=0$ donc les $2\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont des racines de P_n. Comme P_n est de degré n et que pour $k\in[|0;n-1|]$, les racines sont distinctes, on obtient toutes les racines de P_n. (On a au maximum n racines).

   (d) Donc $P_n=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-2\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}))$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2

Première partie : polynômes constants vérifiant $(E_{a,b})$

Soit P un polynôme constant : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$.
Alors P vérifie $(E_{a,b})$ si et seulement si $\lambda = \lambda \times \lambda$: on voit rapidement que cela signifie que $\lambda \in \{0, 1\}$.
Ainsi, les seuls polynômes constants vérifiant $(E_{a,b})$ sont le polynôme nul et le polynôme constant de valeur 1.

Deuxième partie : étude de deux cas particuliers

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est racine de $(P(X+a))^2$ si et seulement si $(P(z+a))^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $P(z+a) = 0$, ou encore lorsque $z + a$ est une racine de P.
   Ainsi, les racines de $(P(X+a))^2$ sont les nombres de la forme $\alpha - a$, où α est une racine de P : il y en a donc autant que de racines de P (car l'application $z \mapsto z - a$ est injective), c'est-à-dire r.

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est racine de $P\left(X^2\right)$ si et seulement si $P\left(z^2\right)$, c'est-à-dire lorsque z^2 est une racine de P.
   Les racines de $P\left(X^2\right)$ sont donc les racines carrées des racines de P.
   Or, tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées, et 0 possède exactement une racine carrée.
   Ainsi, si toutes les racines de P sont non nulles, $P\left(X^2\right)$ admet exactement $r \times 2$ racines.
   Si 0 est une racine de P, alors $P\left(X^2\right)$ admet $2 \times (r-1)$ racines non nulles (les racines carrées des racines non nulles de P), ainsi que le nombre 0 : $P\left(X^2\right)$ possède donc exactement $2(r-1)+1 = 2r-1$ racines.

   (c) Si $P \in S_{a,a}$, alors $P\left(X^2\right) = (P(X+a))^2$... et, en particulier, $P\left(X^2\right)$ et $(P(X+a))^2$ ont autant de racines.
   Ainsi, d'après ce qui précède :
   - ▷ si 0 n'est pas racine de P, $r = 2r$, ce qui impose $r = 0$, et contredit alors que P n'est pas constant (d'après le théorème de d'Alembert-Gauss) ;
   - ▷ si 0 est racine de P, alors $r = 2r - 1$, c'est-à-dire $r = 1$: en d'autres termes, 0 est la seule racine de P.

   Finalement, pour appartenir à $S_{a,a}$, le polynôme P doit admettre 0 pour unique racine.
   Puisque P est scindé, il est forcément de la forme $P = \lambda X^n$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) On vient de justifier que **si** $P \in S_{a,a}$, **alors** il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = \lambda X^n$.
   Voyons donc si un tel polynôme vérifie bien l'égalité $(E_{a,a})$: $P(X^2) = (P(X+a))^2$ si et seulement si $\lambda X^{2n} = \lambda^2 (X+a)^{2n}$.
   En évaluant cette égalité en 0, il vient : $0 = \lambda^2 \times a^{2n}$. Puisque $\lambda \neq 0$, cette égalité est absurde si $a \neq 0$.
   Par conséquent, aucun polynôme non constant ne peut vérifier l'égalité $(E_{a,a})$ si $a \neq 0$. Autrement dit, si $a \neq 0$, $S_{a,a} = \emptyset$.
   Enfin, dans le cas où $a = 0$, l'égalité $(E_{a,a})$ s'écrit, pour nos polynômes : $\lambda X^{2n} = \lambda^2 X^{2n}$, ce qui est équivalent à $\lambda = \lambda^2$. Puisque $\lambda \neq 0$, P vérifie $(E_{0,0})$ si et seulement si $\lambda = 1$.
   Ainsi, $S_{0,0} = \{X^n \,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. (a) Puisque $P \in S_{0,1}$, P n'est pas constant. Ainsi, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe.

(b) Puisque $P(X^2) = P(X) \times P(X+1)$, en évaluant en α, il vient : $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$.
α^2 est donc racine de P.
En évaluant l'égalité $(E_{0,1})$ en α^2, on établit ensuite que α^4 est une racine de P, puis que α^8 également, etc. Par un raisonnement par récurrence relativement simple, on justifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.

(c) Raisonnons par l'absurde, et supposons que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \neq \ell$, $\alpha^{2^k} \neq \alpha^{2^\ell}$. Alors cela signifierait que l'ensemble $\left\{\alpha^{2^n} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$ contiendrait une infinité d'éléments deux à deux distincts. Or ces nombres sont des racines de P. Puisque ce dernier est un polynôme non nul, il ne peut avoir une infinité de racines. L'hypothèse initiale est donc fausse, et il existe donc $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \neq \ell$ et $\alpha^{2^k} = \alpha^{2^\ell}$.
Ainsi, en supposant, par exemple, $k < \ell$, on peut écrire : $\alpha^{2^k}\left(1 - \alpha^{2^\ell - 2^k}\right) = 0$, ce qui implique que $\alpha = 0$ ou $\alpha^{2^\ell - 2^k} = 1$. Cette dernière égalité impose $|\alpha| = 1$.
Par conséquent, $|\alpha| \in \{0, 1\}$.

(d) Puisque $P(X^2) = P(X) \times P(X+1)$, en évaluant en $\alpha - 1$, il vient : $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$.
$(\alpha-1)^2$ est donc une racine de P.
Or, en adaptant le travail de la question précédente, on montre encore que $\left|(\alpha-1)^2\right| \in \{0, 1\}$, ce qui entraîne que $|\alpha - 1| \in \{0, 1\}$.

(e) Cherchons les nombres complexes α qui vérifient $|\alpha| \in \{0, 1\}$ et $|\alpha - 1| \in \{0, 1\}$.
Il y a plusieurs cas à examiner :
- ▷ si $|\alpha| = 0$, alors $\alpha = 0$;
- ▷ si $|\alpha - 1| = 0$, alors $\alpha = 1$;
- ▷ si $|\alpha| = 1 = |\alpha - 1|$, alors on peut écrire $\alpha = \mathrm{e}^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$, car $|\alpha| = 1$.
  De plus, comme $|\alpha - 1| = 1$, $\left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| = 1$, et donc $\left|\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right| = 1$, c'est-à-dire $\left|2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1$.
  Ainsi, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, et donc $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$, ou $\frac{\theta}{2} \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$, ou $\frac{\theta}{2} \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$. On en déduit que $\theta \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
  Par conséquent, $\alpha = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ ou $\alpha = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$.

  D'après le travail précédent, les seules racines possibles de P sont donc 0, 1, $-j$ et $-j^2$.

(f) Si $-j$ était une racine de P, alors, d'après 2.(b), $(-j)^2$ le serait également. Or $(-j)^2 = j^2$ ne figure pas parmi les éventuelles racines de P déterminées ci-dessus. Par conséquent, $-j$ ne peut être racine de P.
De même, si $-j^2$ était racine de P, $\left(-j^2\right)^2 = j$ le serait également, ce qui contredirait la réponse à la question précédente.

(g) D'après ce qui précède, **si** $P \in S_{0,1}$, **alors** 0 et 1 sont les seules racines éventuelles de P.
Un tel polynôme P est donc de la forme $P = \lambda X^n (X-1)^m$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $(n, m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Le polynôme ainsi explicité vérifie $(E_{0,1})$ si et seulement si :
$$\lambda X^{2n}\left(X^2 - 1\right)^m = \underbrace{(\lambda X^n (X-1)^m) \times (\lambda (X+1)^n X^m)}_{=\lambda^2 X^{n+m}(X-1)^m (X+1)^n}$$
Pour que cette égalité soit vérifiée, on voit facilement qu'il faut et qu'il suffit que $\lambda = \lambda^2$ (en identifiant les coefficients dominants) et $n = m$ (en identifiant les ordres de multiplicité des racines).
Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda = \lambda^2$ si et seulement si $\lambda = 1$.
Finalement, $S_{0,1}$ est l'ensemble des polynômes de la forme $X^n (X-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Troisième partie : quelques propriétés dans le cas général

1. Soit $P \in S_{a,b}$: notons λ son coefficient dominant.
   Le coefficient dominant de $P(X^2)$ est alors λ, tandis que celui de $P(X+a)P(X+b)$ est λ^2.
   Puisque $P(X^2) = P(X+a)P(X+b)$, les coefficients dominants de ces deux polynômes sont égaux : $\lambda = \lambda^2$.
   Puisque $\lambda \neq 0$, cette égalité entraîne $\lambda = 1$: P est donc unitaire.
2. Pour tout $(P,Q) \in S_{a,b}^2$:
   $(PQ)(X^2) = P(X^2)Q(X^2) = (P(X+a)P(X+b))\,(Q(X+a)Q(X+b)) = (PQ)(X+a)(PQ)(X+b)$.
   $S_{a,b}$ est donc stable par produit.
3. Ce résultat est une conséquence directe de la réponse à la question précédente, *via* un raisonnement (facile) par récurrence.
4. (a) i. C'est un résultat établi en cours. Les racines de $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, que l'on a déjà écrites $\left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \,;\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$, cette description étant sans répétition.

      Donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \times Q$.

      En examinant le degré de chacun des deux membres de cette égalité, on constate que $\deg(Q) = 0$: il s'agit d'un polynôme constant non nul.

      Si on le note λ ($\in \mathbb{C}^*$), il vient : $X^n - 1 = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)$. $X^n - 1$ étant unitaire, $\lambda = 1$.

   ii. Soit z un nombre complexe autre qu'une racine de B.
      Alors :
$$\begin{aligned} V(z) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(A(z) - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} B(z) \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(B(z) \left(\frac{A(z)}{B(z)} - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \right) \\ &= B(z)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A(z)}{B(z)} - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) = B(z)^n \left(\left(\frac{A(z)}{B(z)} \right)^n - 1 \right) \text{ d'après 4.(a)i.} \\ &= A(z)^n - B(z)^n = U(z) \end{aligned}$$

   iii. On vient d'établir que tout nombre complexe qui n'est pas racine de B est racine du polynôme $U - V$. Or, puisque B est non nul, il possède un nombre fini de racines... si bien qu'on vient de justifier que $U - V$ possède une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

      Finalement, $U = V$, autrement dit : $A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(A - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} B \right)$.

   (b) Supposons que $P^n \in S_{a,b}$.
   Alors $\left(P(X^2)\right)^n = (P(X+a))^n (P(X+b))^n$, donc $\left(P(X^2)\right)^n - (P(X+a)P(X+b))^n = 0$.

   Donc, d'après l'égalité établie dans la question 4.(a) : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(P\left(X^2\right) - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} P(X+a)P(X+b) \right) = 0$.

   Par intégrité de l'anneau $(\mathbb{C}[X], +, \times)$, il découle de l'égalité ci-dessus que l'un, au moins, des facteurs, est nul : il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P\left(X^2\right) - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} P(X+a)P(X+b) = 0$.
   Puisque, d'après 1., P est unitaire, l'égalité ci-dessus ne peut être vérifiée que pour $k = 0$ (car le coefficient dominant de $P(X^2)$ vaut 1, tandis que celui de $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} P(X+a)P(X+b)$ est $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$), ce qui s'écrit :
$$P\left(X^2\right) - P(X+a)P(X+b) = 0$$
   Finalement, $P \in S_{a,b}$.