

Determinants

CNC - 2018

Modifié

$$\beta = a - b$$

$$\gamma = a + (n-1)b$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & -b \\ b & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$$D =$$

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

- 1) Première rg  $(A - \beta I_n)$
- 2) En deduire que  $A - \beta I_n$  non inversible
- 3) Mg  $A - \beta I_n = P^{-1} \Delta P$   
 ou  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc 
$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \dots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) En deduire  $\det A$
- 5) i) A quelle condition A inversible  
 ii) Donner dans ce cas  $A^{-1}$
- 6) i) Vérifier  $(A - \beta I_n)^2 = n(A - \beta I_n)$   
 ii) En deduire une relation entre  $A^2, A, I_n$   
 iii) Reprendre autrement à la question 6