Devoir Maison N°20 Bis

Espaces Prehilbertiens

Notations

Dans toute la suite E est un espace euclidien orienté.
Un vecteur u est dit normé si $||u|| = 1$.
$\mathcal{O}(E)$ est le groupe ortogonal de E. $\mathcal{SO}(E)$ est le groupe spécial de E, càd. l'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs (de det $= 1$).
Si F est un sous espace vectoriel de E, on note s_F, la symétrie orthogonale par rapport à F, on rappelle que $E = F \oplus F^\perp$ et que si $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^\perp$ alors $s_F(x) = a - b$.
On rappelle aussi que $s_F = 2p_F - id_E$ (p_F est la projection orthogonale sur F)
une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan s'appelle une réflexion
Si G est un groupe le centre de G est $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G,\ \text{tq}\ \forall g \in G,\ xg = gx\}$

Symetries orthogonales

Soiet F et G deux sous espaces de E.

1. dans cette question on suppose que $F \subset G^\perp$. Soit $x \in E$
   (a) Montrer qu'il existe $a, b, c \in E$ tels que :
   $x = a + b + c$ et $a \in F$, $b \in G^\perp$, $c \in G$ et $b + c \in F^\perp$.
   (b) Calculer $s_F \circ s_G(x)$ et $s_G \circ s_F(x)$.
   (c) En déduire que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$
2. Montrer que $s_{F^\perp} = -s_F$
3. En utilisant1) et 2) Montrer que :
   (a) si on suppose que $F \subset G$ alors $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$
   (b) si on suppose que $F^\perp \subset G$ alors $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F^\perp \oplus G^\perp)^\perp}$
4. Soit H un hyperpaln de E :
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur normé $u \in E$ tel que $H = (\mathbb{R}u)^\perp$ (on note simplement $H = u^\perp$)
   (b) Montrer que $\forall x \in E,\ s_H(x) = x - 2 < x, u > u$
5. Soit F et G deux hyperplans de E, u et v deux vecteurs normés tels que $F = u^\perp$ et $G = v^\perp$:
   (a) Soit $x \in E$, déterminer $s_F \circ s_G(x)$ et $s_G \circ s_F(x)$.
   (b) En déduire que si $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F$ alors $F = G$ ou $F^\perp \subset G$
6. En déduire que :
   $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F$ si et seulement si $F = G$ ou $F^\perp \subset G$

Générateurs de $\mathcal{O}(E)$

1. soient u et v deux vecteurs non nuls et distincts de même normes, montrer qu'il existe une réflexion s telle que $s(u) = v$.
2. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, et F un sous espace vetoriel de E stable par f, càd $f(F) \subset F$ (donc $f(F) = F$ pourquoi ?), montrer que $F^\perp$ est stable par f, en déduire que l'application $g : \begin{cases} F^\perp \to F^\perp \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.
3. Si $dim\ E = 1$, déterminer $\mathcal{O}(E)$.
4. Montrer que tout élément $f \in \mathcal{O}(E) \setminus \{id_E\}$ est le produit d'au plus n réflexions. càd. il existe des réflexions $s_1, \ldots, s_k$ telles que $1 \leq k \leq n$ et $f = s_1 \circ \cdots \circ s_k$.
   (ind. Par récurrence sur $n = dim\ E$ pour le passage n à $n + 1$ utiliser les questions 1 et 2 de cette partie)

5. On supose $E = \mathbb{R}^3$, montrer que toute rotation est le produit de deux réflexions.

Les retournements

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$
On appelle retournement d'axe D, toute rotation de E d'axe D et d'angle π.

1. Soit f un endomorphisme de E.
   montrer que f est un retournement si et seleument si il existe une base orthonormée B de E telle que la matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Soit f un retournement montrer que $f^2 = id_E$. (c'est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite)
3. Réciproquement soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = id_E$ et $g \in \mathcal{SO}(E) \setminus \{id_E\}$.

   (a) Montrer que $\ker(g - id_E) \oplus \ker(g + id_E) = E$.
   (b) Montrer que $g \neq -id_E$.
   (c) montrer que $dim(\ker(g - id_E)) = 1$.
   (d) Montrer que $\ker(g - id_E)$ et $\ker(g + id_E)$ sont orthgonaux. (ind on utilise le fait que g conserve le produit scalaire)
   (e) En déduire que g est un retournement.
4. Soit φ une rotation différente de id_E.
   (a) Justifier l'existence de deux plans P_1 et P_2 de E, tels que $\varphi = s_{P_1} \circ s_{P_2}$.
   (b) Soient $u, v \in E$ tels que : $P_1 = u^\perp$ et $P_2 = v^\perp$ on pose $P_3 = (u \wedge v)^\perp$.
   i) montrer que $u \wedge v \neq 0$ en déduire que P_3 est un plan.
   ii)montrer que $P_1^\perp \subset P_3$ et $P_2^\perp \subset P_3$.
   (c) On pose : $r_1 = s_{P_1} \circ s_{P_3}$ et $r_2 = s_{P_3} \circ s_{P_2}$.
   i) Montrer que : $r_1 = s_{P_3} \circ s_{P_1}$ et $r_2 = s_{P_2} \circ s_{P_3}$.
   ii) En déduire que r_1 et r_2 sont deux retournements et que : $\varphi = r_1 \circ r_2$.
   (ind. utiliser la question 3 (e) de cette partie)
5. Soit $g \in \mathcal{SO}(E) \setminus \{id_E\}$ une rotation d'axe D.
   (a) Soit $h \in \mathcal{SO}(E)$ montrer $h \circ g \circ h^{-1}$ laisse invariant point par point l'axe $h(D)$, en déduire que $h \circ g \circ h^{-1}$ est une rotation d'axe $h(D)$.
   (b) Soit x un vecteur directeur de D et $y \in E$ tel que (x, y) est libre et $||x|| = ||y||$. on pose h le retournement d'axe dirigé par $x + y$, montrer que $h(x) = y$. (ind. $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$)
   (c) On suppose que $\forall h \in \mathcal{SO}(E)$, $g \circ h = h \circ g$.
   Montrer que $h(D) = D$, $\forall h \in \mathcal{SO}(E)$ en tirer une contradiction.
   (d) En déduire que $\mathcal{Z}(\mathcal{SO}(E)) = \{id_E\}$.
6. Soit R_D un retournement d'axe D et $g \in \mathcal{SO}(E)$, montrer que $g \circ R_D \circ g^{-1}$ est un retournement d'axe $g(D)$.
7. Soit R_{D_1} et R_{D_2} deux retournements d'axes respectifs D_1 et D_2. Montrer qu'il existe une rotation g telle que $g \circ R_{D_1} \circ g^{-1} = R_{D_2}$
   (ind. d'aprés 5 (b) il existe une rotation g telle que $g(D_1) = D_2$...)