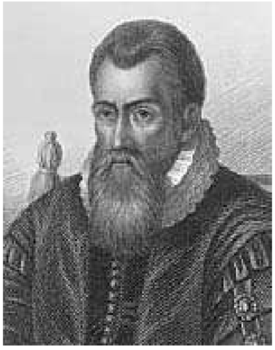
Devoir Maison 4

Fonctions Usuelles

Vendredi 19 Octobre 2018

John Neper (1550-1617)

Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. Issu d'une riche famille, lui-même baron, il se fit connaître par sa défense du protestantisme. Il inventa surtout les logarithmes pour simplifier les calculs trigonométriques nécessaires en astrologie. Neper utilisa aussi ses talents de mathématicien en théologie. Il prévoyait la fin du monde, qui selon lui se produirait soit en 1688 ou en 1700. En génie électrique, une unité de mesure, le néper, a ainsi été nommée en son honneur.



Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n(x)$ la somme : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\text{ch}(2t) = \text{ch}^2(t) + \text{sh}^2(t)$ et que $\text{sh}(2t) = 2\,\text{sh}\,t\,\text{ch}\,t$.

2. En déduire une expression de $\text{th}(2t)$ uniquement en fonction de $\text{th}\,t$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\text{th}\,t}{t} = 1$.

4. A l'aide de **2.**, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(1+\text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)$.

5. En déduire que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(x) = \ln\left(2^n \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\text{th}\,x)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. En utilisant le résultat de **5.** déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S_n(x)$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, fixé. En utilisant le résultat de **5.** et celui de **3.** déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(x)$.

Problème 1

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy < 1$.

a) On pose $\alpha = \operatorname{Arctan} x$ et $\beta = \operatorname{Arctan} y$. Montrer que $\sin\alpha \sin\beta < \cos\alpha\cos\beta$. En déduire que $\alpha + \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Prouver alors l'égalité : $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

2. Soients $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy > 1$. Exprimer $\operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{2k^2}$. *Indication : Appliquer **1b)** avec x et y bien choisis.*

*On étudie maintenant la réciproque de la question **1.***. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\text{pour tous } x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } xy < 1 : \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

4. Montrer que $f(0) = 0$ puis que f est impaire.

5. On fixe x dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout réel y assez proche de x : $\quad f(y) - f(x) = f\left(\dfrac{y-x}{1+xy}\right)$. **b)** En déduire que $f'(x) = \dfrac{f'(0)}{1+x^2}$.

6. En déduire qu'il existe un réel k tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = k \operatorname{Arctan} x$.

Blaque du jour

Une exponentielle, un logarithme et une constante se promènent tranquillement dans la rue. Soudain, elles aperçoivent une dérivation sur le trottoir d'en face. L'exponentielle, pourqui les dérivations ne font pas peur propose d'aller voir la cause, mais la constante ne veut pas, elle explique qu'elle a toujours eu peur des dérivations. Le logarithme n'en veut pas non plus, mais sans expliquer pourquoi L'exponentielle se moque un peu d'elle, et traverse le trottoir pour aller voir la dérivation.

- Bonjour, je suis exp(x), dit l'exponentielle
- Bonjour, je suis $\dfrac{d}{dy}$, réplique la dérivation, tu n'as pas vu le logarithme ?

Fin ! Fin !