Ec Bilha Sup
Prepas MPSI
Prof. MAJOUNI

DM4 : Fcts Usuelles
Corrigé

Pb 1

1) Formule du cours à savoir redemontrer

2) $\operatorname{th} 2t = \dfrac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{ch} 2t} = \dfrac{2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t}$

$= \dfrac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} \; \dfrac{2 \operatorname{sh} t / \operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{sh}^2 t / \operatorname{ch}^2 t}$

$= \dfrac{2 \operatorname{th} t}{1 + \operatorname{th}^2 t}$

3) $\dfrac{\operatorname{th} t}{t} = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} \times \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ $\quad \operatorname{ch} t \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

$\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

$\dfrac{\operatorname{sh} t}{t} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2t} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^t - 1}{t} + \dfrac{e^{-t} - 1}{-t}\right]$

$\dfrac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$, $\quad \dfrac{e^{-t} - 1}{-t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

d'où le resultat

4) $t = \dfrac{x}{2^k}$ et $2t = \dfrac{x}{2^{k-1}}$

$\cancel{\ln(1 + \operatorname{th}^2(t))}$

$\ln\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)\right) = \ln \operatorname{th}(2t) = \ln 2 + \ln(\operatorname{th} t) - \ln(1 + \operatorname{th}^2 t)$

cqfd

1

5) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + th^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) - \ln(a_{k-1})$

où $a_k = th\left(\frac{x}{2^k}\right)$

$= n \ln 2 + \ln(a_n) - \ln a_0$

$= \ln 2^n a_n - \ln a_0$ cqfd

7) on pose $t = \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$2^n\, th\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \frac{th\, t}{t} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

d'où $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = x$

6) n fixe et $x \to \infty$ $\quad th\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$th\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

donc $S_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(2^n) = n \ln 2$

Problème 2

1) a) $\cancel{\cos\alpha \sin\beta}$

$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$= \cos(\alpha + \beta)$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = x \quad , \quad \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = tg\,\beta = y$

$\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\cos\alpha > 0$

$\cos\beta > 0$

$xy < 1 \Rightarrow \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} < 1$

donc $\sin\alpha \sin\beta < \cos\alpha \cos\beta$

et $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta > 0$

donc $\alpha + \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2

$= tg(\alpha+\beta)$

$= \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$= \cancel{\tan\left(Artan \dfrac{x+y}{1-xy}\right)}$

donc $\alpha+\beta \in]-\pi/2, \pi/2[$

donc $Artan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) = Artan\, \tan(\alpha+\beta)$
$= \alpha+\beta$

2) $xy > 1 \Rightarrow \sin\alpha \sin\beta > \cos\alpha \cos\beta$
$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) < 0$

$\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$
donc $-\pi < \alpha+\beta < \pi$
et $\cos(\alpha+\beta) < 0$

donc

$\alpha+\beta \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi[$

$-\pi/2 < \pi + (\alpha+\beta) < \pi/2$ $\quad -\pi/2 < \alpha+\beta-\pi < 0$

et $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{x+y}{1-xy}$

donc $tg(\pi + (\alpha+\beta)) = \dfrac{x+y}{1-xy}$

donc $\pi + (\alpha+\beta) = \dfrac{x+y}{1-xy}$

donc $\alpha+\beta = \dfrac{x+y}{1-xy} + \pi$

ou $\alpha+\beta = \dfrac{x+y}{1-xy} - \pi$

3) il faut trouver a_k tq

$a_k = x$, $a_{k+1} = -y$

$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{1}{2k^2}$ pour avoir télescopage

4) $x = y = 0 \Rightarrow 2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$y = -x \Rightarrow f(x) + f(-x) = f(0) = 0$

5/ a) remplacer ~~x~~ par $-x$

$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) / y-x$

$f'(x)$ qd $y \to x$

on pose $h = y - x$

donc $\frac{f\left(y-x / 1+xy\right)}{y-x} = \frac{f\left(h / 1+x^2+h\right)}{h} = \frac{f\left(\frac{h}{1+x^2+h}\right)}{\frac{h}{1+x^2+h}} \times \frac{~~1+x^2+h~~}{~~h~~(1+x^2+h)}$

$h \xrightarrow[y \to x]{} 0$ ~~y~~ $= h + x$

(4)

Ainsi

$f\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) / y-x$

$= \frac{f(t)}{t} \times \frac{1}{1+x^2+h}$ ou $t = \frac{h}{1+x^2+h} \rightarrow$

$\xrightarrow[\substack{t \to 0 \\ h \to 0}]{} f'(0) \times \frac{1}{1+x^2}$

6) $f(x) = \int_0^t \frac{f'(0)}{1+t^2} dt = \lambda \left[\arctan t\right]_0^x$

$= \lambda \arctan x$

où $\lambda = f'(0)$

FIN