My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison N$^\circ$6
Nombres Réels

Mercredi 31 Octobre 2018

L'objet de ce problème est d'étudier les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, G désigne un tel sous-groupe.

1. Formuler une proposition traduisant que G n'est pas discret. Montrer que si G n'est pas discret alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0,\ G \cap [x, x+\alpha[\neq \emptyset$$
2. Dans cette question, on suppose que $G \neq \{0\}$ est discret. Il existe alors un réel α strictement positif tel que $G \cap]0, \alpha[= \emptyset$.
   a. Soit I un intervalle de longueur $\frac{\alpha}{2}$. Montrer que $G \cap I$ contient au plus un élément. Que peut-on en déduire pour l'intersection de G avec un intervalle quelconque de longueur finie ?
   b. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un plus petit élément que l'on notera m.
   c. Montrer que $G = \{km, k \in \mathbb{Z}\}$. Un tel ensemble sera noté $\mathbb{Z}m$
3. Soit x et y deux réels strictement positifs, on pose
$$X = \mathbb{Z}x = \{kx, k \in \mathbb{Z}\},\ Y = \mathbb{Z}y = \{ky, k \in \mathbb{Z}\},\ S = \left\{mx + ny, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$
   a. Vérifier que X, Y et S sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. On dira que X est le sous-groupe *engendré* par x, que Y est le sous-groupe engendré par y et que S est le sous-groupe engendré par x et y.
   b. Montrer que S est discret si et seulement si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.
4. Soit x et y deux réels strictement positifs, tels que $\frac{x}{y} \notin \mathbb{Q}$. Notons
$$A = \{kx, k \in \mathbb{Z}^*\}, \qquad B = \{ky, k \in \mathbb{Z}^*\}.$$
   a. Montrer que $A \cap B = \emptyset$.
   b. Montrer que
$$\inf\{|a-b|, (a,b) \in A \times B\} = 0.$$
5. En considérant un certain sous-groupe additif et en admettant que π est irrationnel, montrer que $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Sous-groupes additifs réels

Un *sous groupe* (additif) de $(\mathbb{R}, +)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0 et stable pour l'addition et la symétrisation. Autrement dit, $G \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe si et seulement si
$$0 \in G, \qquad \forall (x,y) \in G^2 : x + y \in G, \qquad \forall x \in G : -x \in G$$
Cela entraîne en particulier que pour tout $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$, $ng \in G$ car il peut s'écrire comme une somme de x ou de $-x$.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans B si et seulement si
$$\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0 :\ ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\ \cap\ A \neq \emptyset$$
Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, on dira que G est *discret* si et seulement si
$$\exists \alpha > 0 \ \text{ tel que } \ G \cap]0, \alpha[= \emptyset$$

Fin