Devoir Maison N°8

Suites Numériques

29 Novembre 2018

Moyenne arithmético-géométrique

Préliminaire :

Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(indice : on rappelle qu'une fonction réelle monotone définie sur un intervalle admet en tout point intérieur à cet intervalle une limite à droite et une limite à gauche que l'on peut comparer à la valeur de la fonction en ce point.)

Partie I

Soit a et b deux réels positifs ou nuls.

On définit deux suites de réels positifs (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0=a \\ v_0=b \end{cases}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$.

1. Déterminer ces deux suites ainsi que leurs limites dans les cas suivants

1.a $a=b$.

1.b $a=0$ et $b\in\mathbb{R}^+$ quelconque.

2. On revient au cas général et on se propose d'établir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

2.a Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq v_n$, $u_n\leq u_{n+1}$ et $v_{n+1}\leq v_n$.

2.b Etablir que, pour tout $n\geq 1$, $0\leq v_n-u_n\leq\dfrac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$.

2.c Conclure.

La limite commune à ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. Celle-ci sera désormais notée $\mathcal{M}(a,b)$.

2.d Donner $\mathcal{M}(a,a)$ et $\mathcal{M}(0,b)$ pour $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$.

Dans la suite de ce problème, nous pourrons noter $u_n(a,b)$ et $v_n(a,b)$ les suites précédentes.

3. On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction $(a,b)\mapsto\mathcal{M}(a,b)$.

3.a Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(b,a)=\mathcal{M}(a,b)$.

3.b Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\forall\lambda\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\mathcal{M}(a,b)$.

3.c Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(a,b)=\mathcal{M}(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})$.

3.d Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\sqrt{ab}\le\mathcal{M}(a,b)\le\frac{a+b}{2}$.

Partie II

On considère ici la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\mathcal{M}(1,x)$.

1. Donner $f(0)$ et $f(1)$.

2. On désire établir la croissance de la fonction f.
Pour cela on considère $0\le x\le y$ deux réels.

2.a Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(1,x)\le u_n(1,y)$ et $v_n(1,x)\le v_n(1,y)$.

2.b Conclure.

3. On étudie ici la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

3.a Montrer que $\forall x>0, f(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.b En exploitant le préliminaire, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3.c Montrer que $\forall x>0, f(x)=\frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

3.d En déduire que f est continue en 0.

4. On étudie ici le comportement de f en $+\infty$.

4.a Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\sqrt{x}\le f(x)\le\frac{1+x}{2}$.

4.b Etudier la limite de f en $+\infty$.
Préciser la branche infinie de f en $+\infty$.

5. Représenter sur un même graphe les allures des fonctions $x\mapsto f(x), x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto\frac{x+1}{2}$.

6. En exploitant l'encadrement du II.4.a, étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

Corrigé

Préliminaire

Pour tout $a \in]0,+\infty[$, la croissance de f assure l'existence de $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et donne $\lim_{x\to a^+} f(x) \geq f(a)$. D'autre part la décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ assure l'existence $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x}$ et donne $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(a)}{a}$. De plus par opération sur les limites $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x\to a^+} f(x)$ et la comparaison précédente fournit $\lim_{x\to a^+} f(x) \leq f(a)$ (car $a > 0$). Par double inégalité : $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ et donc f est continue à droite en a. De même, on obtient la continuité à gauche de f en a.

Partie I

1.a Les suites sont constante égales à la valeur commune $a = b$. La limite de celles-ci est encore cette valeur.

1.b Par récurrence, on vérifie aisément que $u_n = 0$ et $v_n = \frac{b}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces deux suites convergent vers 0.

2.a Puisque $a,b \geq 0$ et que $\forall x,y \geq 0$, $\frac{x+y}{2}$ et $\sqrt{xy}$ existent et sont positifs, on peut assurer l'existence des suites (u_n) et (v_n) et affirmer leur positivité.

Il est connu que pour tout $a,b \in \mathbb{R}$: $2ab \leq a^2 + b^2$ et donc pour tout $x,y \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$, puis $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$.

2.b $(v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{2}(v_n - u_n) = u_n - u_{n+1} \leq 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

Par récurrence $v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

2.c Par les résultats précédents, on peut affirmer $(u_n)_{n\geq 1}$ croissante, $(v_n)_{n\geq 1}$ décroissante et $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes à partir du rang 1 et convergent donc vers une même limite.

2.d Par les résultats obtenus en 1.a et 1.b : $\mathcal{M}(a,a) = a$ et $\mathcal{M}(0,b) = 0$.

3.a On observe pour $n \geq 1$: $u_n(a,b) = u_n(b,a)$ et $v_n(a,b) = v_n(b,a)$ donc $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(b,a)$.

3.b On observe pour $n \geq 0$: $u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b)$ et $v_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda v_n(a,b)$ donc $\mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{M}(a,b)$.

3.c On observe, pour $n \geq 0$: $u_{n+1}(a,b) = u_n(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ et $v_{n+1}(a,b) = v_n(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ donc $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$.

3.d Par le théorème des suites adjacentes, on peut affirmer que deux suites adjacentes encadrent sa limite. Ainsi $u_1(a,b) \leq \mathcal{M}(a,b) \leq v_1(a,b)$ i.e. $\forall a,b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \mathcal{M}(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Partie II

1. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

2.a Par une récurrence facile.

2.b Par passage à la limite $f(x) \leq f(y)$. Ainsi f est croissante.

3.a $f(x)=\mathcal{M}(1,x)=x\mathcal{M}(\frac{1}{x},1)=x\mathcal{M}(1,\frac{1}{x})=xf(1/x)$ obtenue en exploitant I.3.a et I.3.b

3.b Par composition, $x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est décroissante donc $x\mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

Par le préliminaire, on peut affirmer que f est continue sur $\left]0,+\infty\right[$.

3.c $f(x)=\mathcal{M}(1,x)=\mathcal{M}\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)=\frac{1+x}{2}\mathcal{M}\left(1,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=\frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

3.d La fonction f est positive et croissante donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe.

En passant la relation du II.3.c à la limite quand $x\to 0^+$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

4.a Par I.3.d : $\sqrt{x}\le \mathcal{M}(1,x)\le \frac{1+x}{2}$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}^+,\sqrt{x}\le f(x)\le \frac{1+x}{2}$.

4.b Par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\frac{f(x)}{x}=f(1/x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)=0$ donc f admet une branche parabolique horizontale.

5. Faire une figure…

6. Pour $h>0$: $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\le \frac{f(1+h)-f(1)}{h}\le \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}$.

Pour $h<0$: $\frac{1}{2}\le \frac{f(1+h)-f(1)}{h}\le \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ donc $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}$.

f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$.