Devoir Maison N°9

Fonctions Réelles

10 Décembre 2018

Problème 1

On note $I =]-1/2, +\infty[$ et $f(x) = \ln(1+2x)$, $\forall x \in I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $u_0 > 0$.

1. Vérifier que u_n est bien défini pour tout n dans $\mathbb{N}$.
2. On pose $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in]-1/2, +\infty[$. Étudier la fonction g et en déduire qu'elle s'annule seulement en 0 et en α, avec $\alpha > 1/2$ (on ne cherchera pas la valeur exacte de α).
3. Dans cette question, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Démontrer que 0 et α sont les seules valeurs possibles pour ℓ.
4. On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0, \alpha]$.
   (a) Montrer que $u_n \in]0, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.7$).
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers α.
5. On suppose $u_0 \in]\alpha, +\infty[$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
6. Dans toute la suite de l'exercice, on pose $u_0 = 1$.
   (a) Étudier la borne supérieure de $|f'|$ sur $[1, \alpha]$.
   (b) En déduire que f est lipschitzienne sur $[1, \alpha]$.
   (c) Démontrer que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (d) En sachant que 0.7 et 1.1 sont des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ respectivement, à partir de quel rang n, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?

Exercice

Soit h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h(x) = \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ si $|x| < 1$ et $h(-1) = h(1) = 0$.

1. Montre que h est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et continue sur $[-1, 1]$.
2. Calculer h' sur $]-1, 1[$. En déduire que h est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} h(x), \quad \forall x \in]-1, 1[,$$
   où P_n est une fonction polynomiale.
4. En déduire que h est C^∞ sur $[-1, 1]$.

Problème 2

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x$.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur un intervalle I. Soient x_0, y_0, x et y dans I tels que $x_0 < x < y_0 < y$. On définit, sur $[0,1]$, l'application φ par :
$$\varphi(t) = f\big(tx_0 + (1-t)x\big) - f\big(ty_0 + (1-t)y\big), \quad \forall t \in [0,1].$$
   (a) Montrer que φ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
   (b) En déduire que $\varphi(0) \times \varphi(1) > 0$.
   (c) Montrer que f est strictement monotone.
2. Soit f une fonction de $\mathscr{E}$.
   (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser et donner f^{-1}.
   (b) En déduire que f est strictement monotone.
   (c) Supposons que f est strictement croissance.
      i. Montrer qu'il n'existe pas de réel x tel que $x > f(x)$.
      ii. Quelles sont les fonctions strictement croissantes de $\mathscr{E}$?
3. Dans cette partie, f est une fonction strictement décroissante de $\mathscr{E}$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe que l'on notera x_0.
   (c) On définit la fonction h par $h(x) = f(x + x_0) - x_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que h appartient à $\mathscr{E}$, que h est décroissante et que $h(0) = 0$.
4. Soit $h \in \mathscr{E}$ telle que $h(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi : x \mapsto h(x-a) + a$. Montrer que φ appartient à $\mathscr{E}$.
5. Pourquoi, pour déterminer les fonctions strictement décroissantes de $\mathscr{E}$, il suffit de déterminer celles qui s'annulent en 0 ?
6. Soit f une fonction de $\mathscr{E}$ strictement décroissante telle que $f(0) = 0$. Notons g la restriction de f à $]-\infty, 0]$.
   (a) Montrer que g est bijective et continue de $]-\infty, 0]$ sur son image que l'on déterminera.
   (b) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = g^{-1}(x)$.
7. Soit g une fonction continue, bijective et strictement décroissante de $]-\infty, 0]$ dans $[0, +\infty[$. Montrer qu'il existe f dans $\mathscr{E}$ telle que g est la restriction de f à $]-\infty, 0]$.
8. Caractériser les fonctions appartenant à $\mathscr{E}$.

Corrigé

Problème 1

1. On a $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, donc u_u est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On a g qui est dérivable sur I. Comme $g'(x) = \dfrac{1-2x}{1+2x}$, $\forall x \in I$, on obtient :

x	$-1/2$		0		$1/2$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Comme g est C^0 est strictement monotone sur les intervalles $]-1/2, 1/2]$ et $[1/2, +\infty[$, f s'annule uniquement en 0 et en α, avec $\alpha > 1/2$.
3. Comme f est C^0 sur I, si (u_n) converge alors elle converge vers un point fixe de f. Or, d'après la question 2, 0 et α sont les seuls points fixes de f.
4. (a) On a $f([0,\alpha]) = [0, \ln(2)] \subset [0, \alpha]$. Comme $u_0 \in]0, \alpha]$ et que $[0, \alpha]$ est stable par f, $u_n \in [0, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Comme f est croissante sur I et que $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0, \alpha]$, alors (u_n) est croissante. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \alpha]$, (u_n) est bornée. Ainsi (u_n) est convergente. Sa limite ne peut être que α car $u_0 > 0$ et (u_n) croissante.
5. L'intervalle $[\alpha, +\infty[$ est stable par f, f est croissante sur I et $g(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [\alpha, +\infty[$. Ainsi, comme $u_0 \in [\alpha, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha, +\infty[$, donc (u_n) est minorée, et (u_n) est décroissante. En conclusion, (u_n) est convergente et sa limite ne peut être que α.
6. (a) On a $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$, $\forall x \in I$. Comme, f' est décroissante et possitive sur I, on a $\max\limits_{[1,\alpha]} |f'| = f'(1) = 2/3$.

   (b) Comme f' est bornée par $2/3$ sur $[1, \alpha]$, f est $2/3$-lipschitzienne sur $[1, \alpha]$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est $2/3$-lipschitzienne sur $[1, \alpha]$, on a $|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha|$, d'où $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha|$. Puis, par récurrence, on trouve $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Donc $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ car $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$.

   (d) Pour cela, il suffit d'avoir $(2/3)^n \leqslant 10^{-4}$, c'est-à-dire $n \geqslant 4\dfrac{\ln(10)}{\ln(3/2)}$. De plus, on a $4\dfrac{\ln(10)}{\ln(3/2)} \simeq \dfrac{4 \times 2\ln(3)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq \dfrac{8 \times 1.1}{0.4} = 22$. Ainsi, $n = 23$ convient.

Exercice

1. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ et $x \mapsto e^x$ sont respectivement C^∞ sur $]-1,1[$ et $\mathbb{R}$, d'où h est C^∞ sur $]-1,1[$. On a $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\mapsto \pm 1} h(x) = 0$, donc h est C^0 en -1 et 1. Ainsi, h est C^0 sur $[-1,1]$.
2. On trouve $h'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}\exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}h(x)$, $\forall x \in]-1,1[$. De plus, $\lim\limits_{y\mapsto -\infty} y^n e^y = 0$, d'où $\lim\limits_{x\mapsto\pm 1} h'(x) = 0$. Ainsi, h est dérivable en -1 et en 1, avec $h'(-1) = h'(1) = 0$, et h' est C^0 en -1 et en 1. En conclusion, h est C^1 sur $[-1,1]$.
3. Pour $n = 0$, c'est évident et d'après le calcul de h', c'est aussi vrai pour $n = 1$. On suppose que la formule est vraie au rang n. En dérivant, comme $(x^2-1)^2 h'(x) = -4xh(x)$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
h^{n+1}(x) &= \frac{P_n'(x)h(x)(x^2-1)^{2n} + h'(x)P_n(x)(x^2-1)^{2n} - 4nx(x^2-1)^{2n-1}P_n(x)h(x)}{(x^2-1)^{4n}} \\
&= \frac{P_n'(x)h(x)(x^2-1)^{2n} - 4xh(x)P_n(x)(x^2-1)^{2n-2} - 4nx(x^2-1)^{2n-1}P_n(x)h(x)}{(x^2-1)^{4n}} \\
&= \frac{\big(P_n'(x)(x^2-1)^2 - 4xP_n(x) - 4nx(x^2-1)P_n(x)\big)h(x)}{(x^2-1)^{2n+2}}
\end{aligned}
$$

   On pose $P_{n+1}(x) = P_n'(x)(x^2-1)^2 - 4xP_n(x) - 4nx(x^2-1)P_n(x)$. On a P_{n+1} qui est bien une fonction polynomiale, donc la formule est vraie au rang $n+1$, ce qui termine le raisonnement par récurrence.
4. On a $\lim\limits_{x\mapsto\pm 1} \dfrac{h(x)}{(x^2-1)^{2n}} = 0$, car $\lim\limits_{y\mapsto -\infty} y^n e^y = 0$, donc $\lim\limits_{x\mapsto\pm 1} h^n(x) = 0$. Ainsi, h^n est continue en -1 et en $+1$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conclusion, h est C^∞ en -1 et 1, puis h est C^∞ sur $[-1,1]$.

Problème 2

1. (a) On suppose qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = 0$. En posant $x_1 = cx_0 + (1-c)x$ et $y_1 = cy_0 + (1-c)y$, on a $x_1 \in [x_0, x]$ et $y_1 \in [y_0, y]$, d'où $x_1 \neq y_1$, et $f(x_1) - f(y_1) = 0$, c'est-à-dire $f(x_1) = f(y_1)$. Ceci contredit l'injectivité de f, donc φ ne s'annule pas sur $[0,1]$.

   (b) Comme f est C^0, φ est C^0 sur $[0,1]$. Ainsi, d'après le TVI, si $\varphi(0)\varphi(1) \leqslant 0$, alors φ s'annule ou change de signe, donc φ s'annule sur $[0,1]$. Ceci est absurde d'après la question 1.a, donc $\varphi(0)\varphi(1) < 0$.

   (c) D'après la question précédente, $f(x_0) - f(y_0)$ et $f(x) - f(y)$ sont de même signe. Si $f(x_0) < f(y_0)$ ($f(x_0) > f(y_0)$ respectivement), alors $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$ respectivement). Ceci étant vrai pour tout $(x_0, y_0) \in I^2$, on en déduit que φ est strictement monotone sur I.
2. (a) Comme $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f^{-1} = f$.

   (b) Comme est continue et bijective sur $\mathbb{R}$, f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1).
   (c) i. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > f(x)$, on a $f(x) > f(f(x)) = x$ (car f est strictement croissante et $f \in \mathscr{E}$), ce qui est absurde.
      ii. Si f est strictement croissante, on a $x \leqslant f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (d'après la question précedente). Donc, $f(x) \leqslant f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (car f est croissante). Donc, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. L'identité est la seule fonction strictement croissante dans $\mathscr{E}$.
3. (a) Comme f est strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.
   (b) On pose $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Comme f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour g. De plus, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$, donc g change de signe sur $\mathbb{R}$. D'après le TVI, g s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h(h(x)) = f(f(x+x_0) - x_0 + x_0) - x_0 = f(f(x+x_0)) - x_0 = x + x_0 - x_0 = x$. Comme h est clairement continue sur $\mathbb{R}$, on trouve que $h \in \mathscr{E}$. De plus, f est décroissante, donc h l'est aussi Enfin $h(0) = 0$ car $f(x_0) = x_0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h(h(x-a)) = x - a$, d'où $\varphi(\varphi(x)) = h(h(x-a) + a - a) + a = h(h(x-a)) + a = x - a + a = x$. Donc $\varphi \in \mathscr{E}$ et $\varphi(a) = a$.
5. D'après la question 3, on peut construire, à partir d'une fonction f strictement décroissante de $\mathscr{E}$, une fonction h de $\mathscr{E}$ qui s'annule en 0. Réciproquement, d'après la question 4, à partir de $h \in \mathscr{E}$ qui s'annule en 0, on peut obtenir une fonction de $\mathscr{E}$ dont a est le point fixe.
6. (a) g est strictement décroissante et continue sur $]-\infty, 0]$ car f l'est, donc g est bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $[0, +\infty[$
   (b) Comme $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(g(x)) = f(f(x)) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(f(x)) = f(f(x)) = x$, alors $g^{-1} = f$ sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, $f = g^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
7. On a $g(0) = 0$. On pause $f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \\ g(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$. Il est clair que g est la restriction de f à $\mathbb{R}_-$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(f(x)) = f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$. Si $x \in \mathbb{R}_-$, on a $f(f(x)) = f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$. Dans tous les cas, $f(f(x)) = x$. Ainsi, f appartient à $\mathscr{E}$.
8. Les fonctions de $\mathscr{E}$ sont l'identité de $\mathbb{R}$ et les fonctions continues strictement décroissantes de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$ prolongées sur $\mathbb{R}$ comme dans la question 7.