Vendredi 05 Octobre 2018

Devoir Surveillé 1

Logie-Sommes-Complexes

Durée : 2 heure

Documents & Calculatrices interdits

Exercice 1 (Niveau 1) : Donner les négations de

(a) $\forall x \in]-1,1[, \exists y \in]-1,1[, y < x$.

(b) $\forall x \in [0,+\infty[,\ x^2 \geqslant x \geqslant 0$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\quad [(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \implies (x=0)]$.

Exercice 2 (Une somme classique par récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3 (Niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}}$. 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k$. 3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.

Exercice 4 (Niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \binom{2n}{k} - (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \right).$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

Exercice 5 (Niveau 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que $4^n \geqslant \binom{2n}{n}$.
2. Un résultat de croissance
   (a) Démontrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
   $$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{n}{2}$, on a :
   $$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}.$$
   Comparer de même sans justifier, les nombres $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k+1}$ pour k entier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n-1$.
3. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, comparer $\binom{2n}{k}$ et $\binom{2n}{n}$, en déduire que $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

Nous venons donc de montrer l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Exercice 6 (Niveau 1-2)

Les trois questions sont indépendantes.

1. On pose $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{1-i}$.
   (a) Donner l'écriture algébrique de Z.
   (b) Donner une écriture exponentielle de Z.
   (c) Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Déterminer des réels a, b, A, B tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^3(x) = A\cos(ax) + B\cos(bx).$$
   On pourra développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3$.

Exercice 7 (Niveau 4 : Facultatif)

L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors on a*
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$, et le réel $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ est appelé moyenne géométrique de $x_1, \ldots, x_n$.

1. Démontrer l'inégalité pour $n = 2$.
2. Cas général : on note m la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.
   Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure (on pourra utiliser librement l'inégalité classique suivante : pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).