Simulation DS N°2

Complexes-Fcts. Usuelles-Eq. Diff.

Lundi 22 Octobre 2018

Durée : 1 heure

Exercice 1 :

1. Décrire et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\frac{z}{z-2i} \in \mathbb{R}.$$

On note M, A, O les points d'affixe $z, 2i, 0$. On a

$$\frac{z}{z-2i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \quad z = k(z-2i) \quad \text{et} \quad z \neq 2i.$$

Cette condition équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires avec $M \neq A$. L'ensemble cherché correspond donc à la droite (OA) privée du point A, c'est-à-dire à l'axe des ordonnées privé du point A.

2. Déterminer puis représenter graphiquement les racines 4-ièmes du nombre -1.
$(\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}})^4 = \mathrm{e}^{i\pi} = 1$ donc les racines 4-ièmes de -1 sont :

$$\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{i(2k+1)\pi}{4}} \qquad k \in [\![0,3]\!].$$

Cela correspond aux quatre points d'affixe $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

3. Déterminer un argument de $z = -2(1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}})$.
on a $z = -2(1+\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{7}}) = -2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{14}}(\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{14}} + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{14}}) = -4\cos\frac{\pi}{14}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{14}}$. Comme $\cos\frac{\pi}{14} > 0$, on en déduit que $\boxed{\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{14}}$.

4. Soit M un point d'affixe z, $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe u et Ω un point d'affixe ω. On note z_i l'affixe du point M_i.

   (a) On note M_1 l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$. On note M_2 l'image de M_1 par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner l'affixe du point M_2 en fonction de z.

   On a $z_1 = z + u$ et $z_2 = \overline{z_1}$ donc $z_2 = \overline{z+u} = \boxed{\overline{z} + \overline{u}}$.

   (b) On note M_3 l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ, puis M_4 l'image de M_3 par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2. Donner l'affixe de M_4.

   On obtient $\boxed{z_3 - \omega = 2e^{i\theta}(z - \omega)}$.

5. Démontrer par double inclusion, l'égalité d'ensembles suivante :

$$\underbrace{\{e^{ir\pi} \ | \ r \in \mathbb{Q}\}}_{A} = \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \ | \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ z^n = 1\}}_{B}.$$

Remrquons déjà que B est l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité lorsque n décrit N^*, on aurait pu écrire que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$.

Si $z \in A$, alors $z = e^{\frac{ip\pi}{q}}$ avec p et q des entiers ($q \neq 0$). Alors $z^{2q} = e^{\frac{2ipq\pi}{q}} = e^{2ip\pi} = 1$, donc $z \in B$.

Réciproquement, si $z \in B$, alors il existe n tel que $z^n = 1$. Donc z est une racine n-ième de l'unité donc $z = e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{ir\pi}$ avec $r = \frac{2k}{n} \in \mathbb{Q}$ car $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $z \in A$.

Exercice 2 :

1)

Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{1}{x}y = 1 + \frac{1}{x^2}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\text{f solution de (E) sur I} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xf)'(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x) + \lambda}{x}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+6y'+9y=0$ est $r^2+6r+9=0$ qui admet la racine double $r=-3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{2x}$. Pour tout réel x, $f''(x)+6f'(x)+9f(x)=25ae^{2x}$ puis,

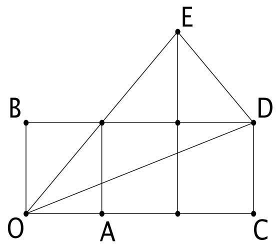
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+6f'(x)+9f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow 25a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{25}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''+6y'+9y=e^{2x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{25}e^{2x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{1}{25}e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

3) $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin}x\,dx = x\operatorname{Arcsin}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{Arcsin}x+\sqrt{1-x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$

Problème :



1. (a) On se place dans le repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

On a les coordonnées : $C(3,0)$, $D(3,1)$ et $E(2,2)$.

Soit $\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$, $\beta=(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}})$. On a : $\tan\alpha=\dfrac{CD}{OC}=\dfrac{1}{3}$ et $\tan\beta=\dfrac{DE}{OE}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\alpha=\arctan\dfrac{1}{3}$ et $\beta=\arctan\dfrac{1}{2}$. Mais $\alpha+\beta=(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}})=\dfrac{\pi}{4}$.

On a donc obtenu : $\boxed{\dfrac{\pi}{4}=\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}}$ (formule attribuée à Euler en 1738, ou à Hutton en 1776).

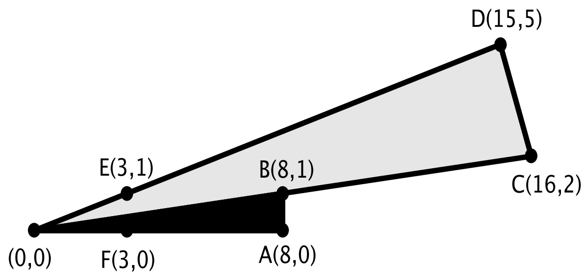
(b) Dans un repère convenable, on a les coordonnées indiquées ci-contre :

On voit que O,E,D sont alignés, de même que les points O,B,C, de même que les points O,F,A.

On constate que les angles en A et D sont droits.

On définit les angles :

$\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, $\beta=(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$ et $\gamma=(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OE}})$.



On a $\tan\alpha=\dfrac{AB}{OA}=\dfrac{1}{8}$ et $\tan\beta=\dfrac{CD}{OD}=\dfrac{1}{5}$ (car $\overrightarrow{CD}=(-1,3)$ et $\overrightarrow{OD}=5(3,1)$ donc $OD=5\,CD$).

Mais $\alpha+\beta=\gamma$ et $\tan\gamma=\dfrac{EF}{OF}=\dfrac{1}{3}$. On a donc obtenu l'égalité : $\arctan\dfrac{1}{3}=\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{8}$.

On en déduit une deuxième formule "à la Machin" : $\boxed{\dfrac{\pi}{4}=\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{8}}$

(attribuée à Strassnitzky en 1840, ou à Dase en 1844 avec laquelle il calcula 200 décimales de π).

2. (a) On pose $u_n = F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Tout d'abord $u_0 = F_1^2 - F_0F_2 = 1$.

Ensuite, pour tout n : $\left\{\begin{array}{ll} u_{n+1} & = F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+1}+F_{n+2}) \\ & = F_{n+2}(F_{n+2}-F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -u_n \end{array}\right.$

Ainsi $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -u_n$ pour tout n, donc $u_n = (-1)^n$ pour tout n.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On a : $\tan(G_{2n} - G_{2n+2}) = \dfrac{\dfrac{1}{F_{2n}} - \dfrac{1}{F_{2n+2}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}} = \dfrac{F_{2n+2} - F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}+1} = \dfrac{1}{F_{2n+1}}$ (car $F_{2n}F_{2n+2}+1 = F_{2n+1}^2$).

Mais $1 \leqslant F_{2n} < F_{2n+2}$ donc $0 < G_{2n+2} < G_{2n} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, donc $0 < G_{2n} - G_{2n+2} < \dfrac{\pi}{4}$.

Il en résulte $G_{2n} - G_{2n+2} = \arctan\dfrac{1}{F_{2n+1}} = G_{2n+1}$, c'est-à-dire $\boxed{G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}}$

On a $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ et $F_8 = 21$.

$G_2 = G_3 + G_4 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}}$ et $G_4 = G_5 + G_6 \Rightarrow \boxed{\arctan\dfrac{1}{3} = \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}}$

Enfin $G_6 = G_7 + G_8$ donne $\boxed{\arctan\dfrac{1}{8} = \arctan\dfrac{1}{13} + \arctan\dfrac{1}{21}}$

(c) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} G_{2k+1} + G_{2n} = \sum_{k=1}^{n-1}(G_{2k} - G_{2(k+1)}) + G_{2n} = G_2 = \frac{\pi}{4}$ (télescopage car $G_{2k+1} = G_{2k} - G_{2k+2}$).

Pour $n \geqslant 2$, on a donc $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} G_{2k+1} + G_{2n}$. Si $n = 4$: $\boxed{\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{13} + \arctan\dfrac{1}{21}}$

Quand $n \to \infty$ on a $F_{2n} \to \infty$ donc $G_{2n} \to 0$ et on peut écrire $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \arctan\frac{1}{F_{2k}}$.

Fin