Simulation Concours Blanc N°2

Polynômes & Matrices

Mercredi 13 Mars 2019

Durée : 1 heure

Exercice I : Etude d'une famille de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{iX}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iX}{n}\right)^n\right]$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n (on pourra discuter suivant la parité de n).
2. Déterminer le coefficient constant de P_n. Que peut-on en déduire quant aux racines de P_n ?
3. Montrer que $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
4. Déterminer les racines de P_n.
5. Factoriser le polynôme P_n.

Exercice II : Somme de puissances $7^{\text{ièmes}}$

On considère le polynôme $P = X^3 + 3X - 12i \in \mathbb{C}[X]$. On désigne par x_1, x_2 et x_2 les racines de P.

1. Montrer que les trois racines x_1, x_2 et x_3 sont deux à deux distinctes.
2. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ de X^7 par P.
3. Calculer $S = x_1^7 + x_2^7 + x_3^7$.

Exercice III : Résolution d'un système

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-2 \\ \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}=0 \end{cases}$$

Exercice IV : Calcul des puissances d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Comparer les matrices AP et PT.
2. Prouver que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Calculer T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression explicite de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
5. *Une application.* On note (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies par $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n + 3w_n \end{cases}$. Déterminer une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

PCSI – Devoir à la maison N°12 – Un corrigé

EXERCICE I

① Nous allons développer P_n à l'aide de la formule du binôme de Newton (applicable dans $\mathbb{K}[X]$ qui est commutatif).

1^er^ Cas : n est pair : $n=2p$. On a : $P_{2p} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k \left(\frac{iX}{2p}\right)^k - \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k\left(-\frac{iX}{2p}\right)^k\right]$

donc $P_{2p} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k\left(\frac{iX}{2p}\right)^k\left(1-(-1)^k\right) = \frac{C_{2p}^{2p-1}}{2i}\left(\frac{iX}{2p}\right)^{2p-1}\times 2 + \underbrace{\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p-2} C_{2p}^k\left(\frac{iX}{2p}\right)^k\left(1-(-1)^k\right)}_{\text{polynôme de degré } \leq 2p-2}$

Ainsi, le degré de P_{2p} est $2p-1$ et son coefficient dominant est :

$$\frac{C_{2p}^{2p-1}}{2i}\times\frac{i^{2p-1}}{(2p)^{2p-1}}\times 2 = \frac{1}{2i}\times\frac{(2p)!}{(2p-1)!\,1!}\times\frac{(i^2)^{p-1}\times i}{(2p)^{2p-1}}\times 2 = \frac{2p}{(2p)^{2p-1}}\times(-1)^{p-1} = \frac{1}{(2p)^{2p-2}}\times(-1)^{p-1}$$

2^nd^ Cas : n est impair : $n=2p+1$. On a $P_{2p+1} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k\left(\frac{iX}{2p+1}\right)^k - \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k\left(\frac{-iX}{2p+1}\right)^k\right]$

donc $P_{2p+1} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k\left(\frac{iX}{2p+1}\right)^k\left[1-(-1)^k\right] = \frac{C_{2p+1}^{2p+1}}{2i}\left(\frac{iX}{2p+1}\right)^{2p+1}\times 2 + \underbrace{\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p} C_{2p+1}^k\left(\frac{iX}{2p+1}\right)^k\left(1-(-1)^k\right)}_{\text{polynôme de degré } \leq 2p}$

Ainsi, le degré de P_{2p+1} est $2p+1$ et son coefficient dominant est :

$$\frac{C_{2p+1}^{2p+1}}{2i}\times\frac{i^{2p+1}}{(2p+1)^{2p+1}}\times 2 = \frac{1}{2i}\times\frac{(i^2)^p\times i}{(2p+1)^{2p+1}}\times 2 = \frac{1}{(2p+1)^{2p+1}}\times(-1)^p$$

En conclusion : $\boxed{\deg(P_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}}$ $\boxed{\text{coef.dom de } P_n = \begin{cases}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p)^{2p-2}} & \text{si } n=2p \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2p+1}} & \text{si } n=2p+1 \text{ est impair}\end{cases}}$

② Le coefficient constant de $\left(1+\frac{iX}{n}\right)^n$ est 1 et celui de $\left(1-\frac{iX}{n}\right)^n$ est 1 également. On en déduit donc que :

$\boxed{\text{Le coefficient constant de } P_n \text{ est } 0}$

On en déduit donc que $P_n = a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots$. Par conséquent $P_n(0)=0$: $\boxed{0 \text{ est une racine de } P_n}$

③ Écrivons P_n à l'aide de la formule du binôme de Newton : $P_n = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{i^k}{n^k}\left(1-(-1)^k\right)X^k$.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons $a_k = \frac{1}{2i}C_n^k\frac{i^k}{n^k}\left(1-(-1)^k\right)$. On a $\overline{a_k} = \frac{-1}{2i}C_n^k\frac{(-i)^k}{n^k}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{-1}{2i}C_n^k\frac{i^k}{n^k}\left((-1)^k-1\right)$

donc $\overline{a_k} = \frac{1}{2i}C_n^k\frac{i^k}{n^k}\left(1-(-1)^k\right) = a_k$. Par conséquent, tous les a_k sont des nombres réels.

On en déduit : $\boxed{P_n\in\mathbb{R}[X]}$

④ $z\in\mathbb{C}$ est racine de $P_n \iff P_n(z)=0 \iff \left(1+\frac{iz}{n}\right)^n = \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n$

Remarquons que $\frac{n}{i}$ n'est pas racine de P_n, d'où $1-\frac{iz}{n}\neq 0$, ce qui nous permet d'écrire :

z est racine de $P_n \iff \frac{\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{iz}{n}\right)^n} = 1 \iff \left(\frac{1+\frac{iz}{n}}{1-\frac{iz}{n}}\right)^n = 1 \iff \left(\frac{n+iz}{n-iz}\right)^n = 1$

1^er^ Cas : n est pair : $n=2p$; $\left(\frac{n+iz}{n-iz}\right)^n = 1 \iff \exists k\in[\![0,p-1]\!]\cup[\![p+1,2p-1]\!]$, $\frac{2p+iz}{2p-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{2p}} = e^{i\frac{k\pi}{p}}$

(Notons que le cas $k=p$ a été enlevé car on aurait alors $\frac{2p+iz}{2p-iz}=-1$, c'est à dire $p=0$, ce qui est faux !)

Ainsi : z racine de $P_{2p} \iff \exists k \in [\![0,2p-1]\!] \setminus \{p\}$, $2p+iz = e^{i\frac{k\pi}{p}}(2p-iz)$

$\iff \exists k \in [\![0,2p-1]\!] \setminus \{p\}$, $z\left(i+ie^{i\frac{k\pi}{p}}\right) = 2p\left(e^{i\frac{k\pi}{p}}-1\right)$

$\iff \exists k \in [\![0,2p-1]\!] \setminus \{p\}$, $z = \dfrac{2p}{i} \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{p}}-1}{e^{i\frac{k\pi}{p}}+1} = \dfrac{2p}{i} \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{2p}}}{e^{i\frac{k\pi}{2p}}} \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{2p}} - e^{-i\frac{k\pi}{2p}}}{e^{i\frac{k\pi}{2p}} + e^{-i\frac{k\pi}{2p}}}$

$\iff \exists k \in [\![0,2p-1]\!] \setminus \{p\}$, $z = \dfrac{2p}{i} \times \dfrac{2i\sin(k\pi/2p)}{2\cos(k\pi/2p)}$

$$\boxed{\text{Les racines de } P_{2p} \text{ sont les } 2p\tan\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \text{ pour } k \in [\![0,2p-1]\!]\setminus\{p\}}$$

2nd Cas : n est impair : $n = 2p+1$; $\left(\dfrac{n+iz}{n-iz}\right)^n = 1 \iff \exists k \in [\![0,2p]\!]$, $\dfrac{2p+1+iz}{2p+1-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$

Ainsi : z est racine de $P_{2p+1} \iff \exists k \in [\![0,2p]\!]$, $2p+1+iz = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}(2p+1-iz)$

$\iff \exists k \in [\![0,2p]\!]$, $z\left(i+ie^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right) = (2p+1)\left(e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}-1\right)$

$\iff \exists k \in [\![0,2p]\!]$, $z = \dfrac{2p+1}{i} \times \dfrac{e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}-1}{e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}+1} = \dfrac{2p+1}{i} \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{2p+1}}}{e^{i\frac{k\pi}{2p+1}}} \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{2p+1}} - e^{-i\frac{k\pi}{2p+1}}}{e^{i\frac{k\pi}{2p+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{2p+1}}}$

$\iff \exists k \in [\![0,2p]\!]$, $z = \dfrac{2p+1}{i} \times \dfrac{2i\sin(k\pi/2p+1)}{2\cos(k\pi/2p+1)}$

$$\boxed{\text{Les racines de } P_{2p+1} \text{ sont les } (2p+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \text{ pour } k \in [\![0,2p]\!]}$$

Remarque : $\deg(P_{2p}) = 2p-1$ et on a bien trouvé $2p-1$ racines pour P_{2p}. De même, $\deg(P_{2p+1}) = 2p+1$ et on a bien trouvé $2p+1$ racines !

5 On déduit des questions 2 et 4, en distinguant encore une fois les cas n pair et n impair :

$$\boxed{P_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2p)^{2p-2}} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{2p-1} \left(X - 2p\tan\left(\frac{k\pi}{2p}\right)\right) \qquad P_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2p+1}} \prod_{k=0}^{2p} \left(X - (2p+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)}$$

EXERCICE II

1 Montrer que les racines z_1, z_2 et z_3 sont 2 à 2 distinctes revient à prouver que P n'a pas de racine (au moins) double.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que P admette une racine (au moins) double, notée α. On a alors

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 + 3\alpha - 12i = 0 \\ 3\alpha^2 + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 + 3\alpha - 12i = 0 \\ \alpha^2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 + 3\alpha - 12i = 0 \\ \alpha = i \text{ ou } \alpha = -i \end{cases}$$
, ce qui est impossible.

Ainsi : $\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } 2 \text{ à } 2 \text{ distinctes}}$

2

$$\begin{array}{r|l} X^7 & X^3 + 3X - 12i \\ \hline -3X^5 + 12iX^4 & X^4 - 3X^2 + 12iX + 9 \\ 12iX^4 + 9X^3 - 36iX^2 & \\ 9X^3 - 72iX^2 - 144X & \\ -72iX^2 - 171X + 108i & \end{array}$$

Ainsi : $\boxed{X^7 = (X^3+3X-12i)Q + R \text{ avec } Q = X^4 - 3X^2 + 12iX + 9 \text{ et } R = -72iX^2 - 171X + 108i}$

2/4

3. D'après la question précédente, on peut écrire que :

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \quad x_i^7 = (x_i^3 + 3x_i - 12i)Q(x_i) + R(x_i)$$

Or, x_i étant racine de P, on en déduit : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ x_i^7 = R(x_i) = -72i\,x_i^2 - 171x_i + 108i$

Par conséquent : $S = -72i\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 171(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \times 108\,i$

D'après les relations coefficients racines, on déduit que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0 \qquad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= 0 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= -2 \times 3 = -6 \end{aligned}$$

Finalement : $S = (-72i) \times (-6) + 3 \times 108\,i$, c'est à dire $\boxed{S = 756\,i}$

EXERCICE III

Le domaine de définition du système est $(\mathbb{C}^*)^3$.

$$\begin{cases} x+y+z = -2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2 \\ \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ \frac{yz + xz + xy}{xyz} = -2 \\ \frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2}{xyz} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ yz + xz + xy = -2xyz \\ (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = 0 \end{cases}$$

Or, $(xy + xz + yz)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2xyz(x+y+z)$

Donc, le système équivaut à :

$$\begin{cases} x+y+z = -2 \\ yz + xz + xy = -2xyz \\ (xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x+y+z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = -2xyz \\ (xy + xz + yz)^2 + 4xyz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = -2xyz \\ 4(xyz)^2 + 4xyz = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = -2xyz \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{ou}} \quad \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = -2xyz \\ xyz = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{ou}} \quad \begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = 2 \\ xyz = -1 \end{cases}$$

Remarquons que le premier système aura nécessairement une solution (x,y,z) avec x ou y ou z nul, ce qui ne convient pas ici !

Donc, le système équivaut à $\begin{cases} x+y+z = -2 \\ xy + xz + yz = 2 \\ xyz = -1 \end{cases} \iff \{x,y,z\}$ est l'ensemble des racines de

$$\begin{aligned} P &= X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \\ &= (X+1)(X^2 + X + 1) \\ &= (X+1)(X+j)(X+j^2) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(-1, j, j^2), (-1, j^2, j), (j, -1, j^2), (j, j^2, -1), (j^2, -1, j), (j^2, j, -1)\right\}}$

Exercice IV

1. Par le calcul des produits on constate que

$$AP = PT = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. On a $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par l'algorithme du pivot :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$, $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$, puis $L_3 \longleftarrow -L_3$ donnent

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2$, puis l'opération $L_1 \longleftarrow -L_1$ donnent enfin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On écrit $T = N + D$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On constate que

- N et D commutent, en effet : $ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $N^2 = 0$ donc $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$

La formule du binôme permet ainsi d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Ainsi, si $n \geq 1$, la somme se réduit aux deux premiers termes (car $N^k = 0$ pour $k \geq 2$) et il reste

$$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} + 0 = D^n + nND^{n-1}$$

La formule obtenue étant encore vraie si $n = 0$ (les deux membres sont alors égaux à I_3), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

4. D'après **1.**, $AP = PT$. Puisque P est inversible, on a donc, en multipliant à droite par P^{-1} : $\quad A = PTP^{-1}$.
Montrons alors par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- *Pour* $n = 0$. On a $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que, pour cet entier, on ait* $A^n = PT^nP^{-1}$. Dès lors on obtient :

$$A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on peut donc calculer $A^n = PT^nP^{-1}$ en faisant le produit des matrices P, T^n (trouvée en **3.**) et P^{-1} (trouvée en **2.**). On obtient

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Par définition des suites, (u_n), (v_n) et (w_n), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$.
Par récurrence sur n on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$ (pour l'hérédité, si $X_n = A^nX_0$, alors on a bien $X_{n+1} = AX_n = A \times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$). Ainsi, en multipliant le résultat obtenu en **4.** par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \\ -2^n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = 2^n$ et $w_n = -2^n$.