

Simulation DS N°8
Intégration
Séries Numériques

Problème 1

1. Intégrales de Wallis.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.
- (b) En déduire une expression explicite de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n}{n+1}$.
- (d) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. Formule de Stirling.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$. On admettra que pour toute suite (u_n) de limite nulle,

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^4).$$

- (a) Montrer qu'il existe un réel α non nul qu'on déterminera tel que $S_n - S_{n-1} \sim \frac{\alpha}{n^2}$.
- (b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.
- (c) En déduire que (S_n) admet une limite finie S dans \mathbb{R} .
- (d) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$. En considérant $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S .
- (e) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))$.

Correction de l'exercice –

1. Intégrales de Wallis.

- (a) Soit $n \geq 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant \sin^n et en intégrant un facteur \sin . Les fonctions considérées étant de classe C^∞ , l'intégration par partie est licite, et donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) dx = \left[-\cos x \sin^n x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x dx \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-1} x dx = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

- (b) On a : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} = I_0$; $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = I_1$.

On a alors, pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-1} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-3} = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2p(2p-1)\dots 2)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = I_{2p}. \end{aligned}$$

On a de même, pour tout $p \geq 1$.

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \dots = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} I_1 \\ &= \frac{(2p(2p-2)\dots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = I_{2p+1}. \end{aligned}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $0 \leq \sin^n x \leq \sin^{n+1} x$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \quad \text{soit :} \quad I_n \leq I_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, et de plus, puisque

$I_{n-1} \geq I_n$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}.$$

- (d) On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$

Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement et la question (c), on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.

Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \right)^2 \cdot \frac{2p^2}{2p} \cdot \pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \right)^2 \cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. Formule de Stirling.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

(a) On obtient, à l'aide du développement limité de \ln donné dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} - \ln \frac{(n-1)!e^{n-1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{(n-1)}} = \ln \left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1} \sqrt{(n-1)}}{(n-1)!e^{n-1}} \right) \\ &= \ln \left(e \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc $S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

(b) Par un argument classique de comparaison avec une intégrale, du fait de la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur \mathbb{R}_+^* , on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2},$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Ainsi, la somme partielle $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, et elle est clairement croissante. Ainsi, elle est convergente. On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il s'agit en fait d'une série de Riemann, dont la convergence sera un résultat du cours.

(c) Puisque $S_{n-1} - S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, par propriété de conservation du signe, $S_{n-1} - S_n$ est positif à partir d'un certain rang. Si on connaît le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, on peut conclure tout de suite à la convergence de $\sum (S_{n-1} - S_n)$, donc aussi de $\sum (S_n - S_{n-1})$. Sinon, on se ramène au TCSTP classique, en remarquant que l'équivalence ci-dessus implique l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq S_{n-1} - S_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (S_{n-1} - S_n)$ converge.

Or, la somme partielle de cette série est $\sum_{k=1}^n S_k - S_{k+1} = S_1 - S_{n+1}$. Ainsi, la convergence de la série est

équivalente à la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers un réel fini S .

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma_n = e^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = e^S$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \frac{(e^S)^2}{e^S} = e^S$.

De plus : $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)^2 \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!e^{2n}} = \frac{2^{2n} (n!)^2 \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}}$.

D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $e^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $S = \ln \sqrt{2\pi}$.

(e) La limite de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \text{ soit : } \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1 + o(1)), \text{ soit : } \boxed{n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))}.$$

Dans le problème qui suit, on pourra admettre que si (u_n) est une suite récurrence linéaire, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_0u_n$, et si le polynôme $P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0$ admet k racines distinctes r_1, \dots, r_k , alors (u_n) peut s'écrire comme combinaison linéaire des suites (r_i^n) .

Problème 2 Fonction eulériennes

On pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et

$$\zeta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \text{ lorsque cette limite existe. On pose } v_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}.$$

Partie 1 .

1. Justifier l'existence de Γ et B pour $x > 0$ et $y > 0$ et montrer qu'elles sont strictement positifs.
2. Montrer que pour tout réel c on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{cn} t^{y-1} e^{-t} dt = \Gamma(y)$.
3. Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en déduire que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2 .

On considère l'application $f : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1} \end{cases}$, où x est un réel.

1. Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que : $f(t) = \sum_{k=1}^n t^x e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$.
4. Justifier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $t \rightarrow t^x e^{-kt}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt = \frac{\Gamma(x+1)}{k^{x+1}}$.
5. On utilisant sans démonstration le resultat suivant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt = 0$, montrer que :
 $v_n(x)$ converge pour tout $x > 1$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt = \Gamma(x+1)\zeta(x+1)$.

