Devoir Maison

Polynômes
Fractions Rationnelles

PROBLÈME 2 : Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \qquad P_n(\cos x) = \cos nx.} \tag{1}$$

Partie I. Deux exemples

1. Déterminez un polynôme $P_2(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ \tilde{P}_2(\cos x) = \cos(2x)$.

2. Déterminez un polynôme $P_3(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ \tilde{P}_3(\cos x) = \cos(3x)$.

Partie II. Définition récurrente de la suite des polynômes de Tchebychev

1. Unicité — Étant donnés deux polynômes à coefficients réels R et S, démontrez que :

$$\textbf{Si} \text{ pour tout réel } x \in \mathbf{R},\ \tilde{R}(\cos x) = \tilde{S}(\cos x), \quad \textbf{alors } R = S.$$

Déduisez-en que si P_n existe, alors il est unique.

2. Existence —

a. Justifiez $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$.

b. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout réel $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(n+2)x = 2\cos x \cos(n+1)x - \cos nx$$

c. Montrez par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, P_n existe et que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n} \tag{2}$$

Partie III. Factorisation

1. Déterminez le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

2. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation

$$\cos nx = 0 \tag{3}$$

En déduire que P_n admet n racines distinctes dans $[0, \pi]$.

3. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa décomposition primaire.

4. En évaluant le polynôme P_n en un point x_0 bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ sinon.}$$

EXERCICE 1 : Décomposition primaire dans $\mathbf{C}[X]$

Soit $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbf{C}[X]$.

1. Vérifiez que P est divisible par $X+1$ et déterminez $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X+1)Q(X)$.

2. A l'aide du changement d'inconnue $w = z + \dfrac{1}{z}$, résolvez dans $\mathbf{C}$ l'équation $\tilde{Q}(z) = 0$

3. Donnez la décomposition primaire de P dans $\mathbf{C}[X]$.

EXERCICE 2 : Décompositions de polynômes et fractions rationnelles

Soit $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

1. Déterminez la décomposition de $P(X)$ en produits d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

2. Décomposer en éléments simples de $\mathbf{R}(X)$ les fractions suivantes :

a. $F_1(X) = \dfrac{2X^2+3}{(X^2+X+1)^2}$.

Indication : effectuez la division euclidienne de $2X^2+3$ par X^2+X+1.

b. $F_2(X) = \dfrac{1}{X(X^4+X^2+1)}$.

c. $F_3(X) = \dfrac{1}{(X^4+X^2+1)^2}$

CORRIG ´

1. • D'après la **formule de Moivre**, nous avons d'une part $(\cos x+i\sin x)^4=\cos 4x+i\sin 4x$.
D'autre part, d'après la **formule du binôme de Newton**

$$\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^4 &= \cos^4 x+4\cos^3 x\times(i\sin x)+6\cos^2 x\times(i\sin x)^2+4\cos x\times(i\sin x)^3+(i\sin x\\
&= \cos^4 x-6\cos^2 x\times\sin^2 x+\sin^4 x+4i\cos^3 x\sin x-4i\cos x\sin^3 x\\
&= \cos^4 x-6\cos^2 x\times(1-\cos^2 x)+(1-\cos^2 x)^2+4i\cos^3 x\sin x-4i\cos x\sin^3 x\\
&= 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1+4i\cos^3 x\sin x-4i\cos x\sin^3 x
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles nous en déduisons

$$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

• Suivant la même méthode, nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}
\cos 5x &= \mathfrak{Re}\,(\cos 5x+i\sin 5x)=\mathfrak{Re}\,(\cos x+i\sin x)^5\\
&= \mathfrak{Re}\,\big(\cos^5 x+5\cos^4 x\times(i\sin x)+10\cos^3 x\times(i\sin x)^2+10\cos^2 x\times(i\sin x)^3\\
&\qquad +5\cos x\times(i\sin x)^4+(i\sin x)^5\big)\\
&= \mathfrak{Re}\,\big(\cos^5 x-10\cos^3 x\times\sin^2 x+5\cos x\times\sin^4 x\big)\\
&= \cos^5 x-10\cos^3 x\times(1-\cos^2 x)+5\cos x\times(1-\cos^2 x)^2\\
&= 16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x.
\end{aligned}$$

Posons $A(X)=8X^4-8X^2+1$ et $B(X)=16X^5-20X^3+5X$. Les résultats précédents se traduisent par :

$$\boxed{\forall x\in\mathbf{R},\qquad \tilde{A}(\cos x)=\cos(4x)\qquad\text{et}\qquad \tilde{B}(\cos x)=\cos(5x)}$$

▲

Partie II. Définition récurrente de la suite des polynômes de Tchebychev

1. Unicité —

a. Soient R et S deux polynômes à coefficients réels tels que pour tout réel $x\in\mathbf{R}$, $\tilde{R}(\cos x)=\tilde{S}(\cos x)$. Posons $N=R-S$. Par hypothèse pour tout nombre réel $x\in\mathbf{R}$, $N(\cos x)$ est nul. J'en déduis que N possède **une infinité de racines distinctes** ce qui entraîne que N est le polynôme nul. Ainsi, $\boxed{P=Q}$. ▲

b. Soit $n\in\mathbf{N}$. Soit P_n et R_n des polynômes vérifiant(4). En ce cas, pour tout nombre réel x,

$$P_n(\cos x)=R_n(\cos x)=\cos(nx)$$

D'après la question précédente, ceci n'est possible que si $P_n=R_n$. Ce qui prouve l'unicité de P_n. ▲

2. Existence —

a. • $\forall x\in\mathbf{R},\ \cos 0x=1$, par conséquent $P_0=1$,

• $\forall x\in\mathbf{R},\ \cos x=\cos x$, par conséquent $P_1=X$,

- $\forall x \in \mathbf{R},\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, par conséquent, $P_2 = 2X^2 - 1$.

▲

b. Soit$(a,b) \in \mathbf{R}^2$, la formule d'addition pour les cosinus donne :

$$\begin{array}{rcl}\cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b.\end{array}$$

Ajoutant terme à terme ces deux égaliés, nous en déduisons immédiatement :

$$\boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2c\cos a \cos b}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ fixés. Appliquons ce qui précède avec $a = n+1$ et $b = 1$, il vient :

$$\boxed{2\cos(n+1)x\ \cos x = \cos(n+2)x + \cos nx}$$

▲

c. Montrons par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, P_n existe.

Initialisation : D'après la question **2. b ii**, P_0 et P_1 existent.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$ tel que P_n et P_{n+1} existent. Définissons

$$Q = 2XP_{n+1} - P_n$$

D'après la question précédente, nous avons pour tout nombre réel x

$$\begin{array}{rcl}Q(\cos x) & = & 2\cos x P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) \\ & = & 2\cos x\ \cos(n+1)x - \cos nx = \cos(n+2)x.\end{array}$$

Par conséquent le polynôme $Q = 2XP_{n+1} - P_n$ vérifie la relation (4). Il s'en suit que P_{n+2} existe et

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

Conclusion : nous avons prouvé l'existence de P_0 et P_1. Puis nous avons démontré que pour tout entier, **si** P_n et P_{n+1} existent **alors** P_{n+2} existe.
Par récurrence double , nous avons donc démontré que P_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$.
De plus par construction de la suite (P_n), elle vérifie la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n} \tag{5}$$

▲

Partie III. Factorisation

1. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
Initialisation : lorsque $n = 1$, ou $n = 2$, le résultat découle directement de la question **2. b ii**.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que les monômes dominants de P_n et P_{n+1} soient respectivement $2^{n-1}X^n$ et 2^nX^{n+1}. Alors par la relation (5), nous avons $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Comme par hypothèse P_n est de degré n et XP_{n+1} est de degré $n+2$, il résulte des propriétés du degré d'une somme de polynômes que P_{n+2} est un polynôme de degré $n+2 = \max\{d^\circ P_n, d^\circ XP_{n+1}\}$. De plus son monôme dominant est obtenu en effectuant le produit des monômes dominants de $2X$ et P_{n+1}, ce qui donne 2^{n+1}.
Conclusion : nous avons prouvé par récurrence double que $\forall n \geqslant 1$ P_n admet $2^{n-1}X^n$ comme monôme dominant. ▲

2. Résolvons dans $[0,\pi]$ l'équation

$$\cos nx = 0 \tag{6}$$

Pour tout nombre réel $x \in [0,\pi]$, nous avons

$$\cos nx = 0 \iff nx \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2n} \quad [\frac{2\pi}{2n}]$$

Par conséquent l'ensemble des solutions de (6) dans $[0,\pi]$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2n}; \frac{3\pi}{2n}; \frac{5\pi}{2n}; \ldots; \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\} = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n}; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

A présent, recherchons les racines de P_n.
Comme d'après la question **3. a** P_n est degré n, il **admet au plus n racines réelles distinctes**. D'autre part définissons pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad \text{et} \quad x_k = \cos t_k$$

D'après la relation (4) $P(x_k) = \cos nt_k = 0$. D'autre part, la fonction $\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$ étant strictement décroissante donc en particulier injective,

$$\mathsf{Card}\ \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \mathsf{Card}\ \{\cos t_0, \cos t_1, \ldots, \cos t_{n-1}\} = \mathsf{Card}\ \mathcal{S} = n$$

En particulier P_n admet n racines distinctes dans $[-1,1]$.

3. D'après la question précédente, P_n a n racines distinctes. Elles sont données par

$$\boxed{x_k = \cos t_k, \quad \text{ou} \quad t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

D'après le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels, P_n s'écrit

$$P_n = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)^{r_k}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} r_k = n$, il vient $r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-1} = 1$ et en identifiant les coefficients dominants grâce à la question 3. a, nous obtenons :

$$\boxed{P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)}$$

▲

4. En évaluant le polynôme P_n point 0 , nous obtenons

$$\begin{aligned} P_n(0) &= 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(0-x_k) \\ &= 2^{n-1}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

D'où il découle que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}P_n(0)$$

D'autre part, par la relation (4), il vient

$$P_n(0) = P_n(\cos\pi/2) = \cos(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}$$

En réinjectant ce résultat dans la précédente égalité, *we finally get :*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, 0 sinon.}$$

▲

EXERCICE 1

Soit $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbf{C}[X]$.

1. $\tilde{P}(-1) = 0$. D'après la **caractérisation des racines**, ceci revient à dire que P est divisible par $X+1$.✎

✎ P est divisible par X− a si et seulement si $\tilde{P}(a) = 0$.

Par division euclidienne :

$$P(X) = (X+1)\,Q(X), \qquad \text{ou } Q(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1$$

▲

2. 0 n'étant pas racine de Q, on peut écrire que pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\tilde{Q}(z) = 0 \iff z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0 \iff z^2 + 2z - 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

✎ en divisant les deux membres de l'égalité

✎ On effectue alors le changement d'inconnue $w = z + \dfrac{1}{z}$. Comme :

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= w \\ z^2 + \frac{1}{z^2} &= w^2 - 2 \end{aligned}$$

Il vient pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$\tilde{Q}(z) = 0 \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ w = z + \dfrac{1}{z} \\ w^2 + 2w - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ z + \dfrac{1}{z} = w \\ w = 1 \text{ ou } w = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 - z + 1 = 0 \\ \text{ou } z^2 + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de la première équation sont $-j = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $-j^2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de la deuxième équation sont $a = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
Finalement, les solutions de l'équation $\tilde{Q}(z) = 0$ sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-j, -j^2, a, b\}}$$

▲

3. D'après le **théorème de décomposition primaire dans C**$[X]$, on a ✎

$$P(X) = (X+1)(X+j)(X+j^2)(X+a)(X+b)$$

▲.

✎ *on détermine le coefficient dominant par identification*