Devoir Maison N°2

Nombres Complexes

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de déterminer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

1. Déterminer la dérivée de f.

Si l'on veut calculer la dérivée seconde ou troisième, les calculs se compliquent... On va utiliser une autre méthode.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3$. En déduire que
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
4. En déduire la dérivée n-ième de f.

Exercice 2 : On considère le polynôme $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right)$.

1. Résoudre l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire les racines du polynôme P. Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
2. Écrire (inutile de justifier) le polynôme P sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec a, b, c des réels (vérifier que $a + b + c = -4$). Déterminer alors en justifiant une autre écriture des racines de P.
3. Déduire avec soin des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5}$ (on donnera les résultats sous la forme $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ avec a, b, c des entiers).

Exercice 3 :

Soit P une polynôme dont les coefficients valent ± 1. Le but de l'exercice est de démontrer que les racines complexes de P ont un module compris entre $1/2$ et 2.

On rappelle qu'un nombre complexe a est une racine de P si $P(a) = 0$.

1. Exemples :
   (a) Donner les racines complexes de $P = X^2 - X - 1$.
   (b) Donner les racines complexes de $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on pose

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n.$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels qui valent ± 1.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
   (a) Démontrer que
   $$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n\right| \leqslant \frac{|z|}{1 - |z|}.$$
   (b) En déduire que si z est une racine de P, on a $|z| \geqslant \frac{1}{2}$.
3. On suppose cette fois-ci que z est une racine de P avec $|z| > 1$.
   Démontrer que $\frac{1}{z}$ est racine du polynôme $Q = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$, en déduire que $|z| \leqslant 2$.
4. Un peu de dénombrement
   (a) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré n ?
   (b) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré 10 ayant exactement 3 coefficients égaux à $+1$?

Exercice 1 :

Corrigé

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})^3 &= (\mathrm{e}^{ix})^3+3(\mathrm{e}^{ix})^2\mathrm{e}^{-ix}+3\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{-ix})^2+(\mathrm{e}^{-ix})^3\\ &= \mathrm{e}^{i3x}+3\mathrm{e}^{ix}+3\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-i3x}\\ &= \mathrm{e}^{i3x}+\mathrm{e}^{-i3x}+3(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-i3x})\\ &= 2\cos(3x)+6\cos x\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cos^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{2\cos(3x)+6\cos x}{8} = \frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x).$$

3. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

La propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons qu'elle est vrai au rang n. L'idée est que $\cos^{(n+1)} = (\cos^{(n)})'$ et la dérivée de la fonction composée $x \mapsto \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ est $x \mapsto -\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\times 1$.

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$. D'où l'hérédité.

4. On utilise les deux questions précédentes. La dérivée n-ième de la fonction composée $x \mapsto \cos(3x)$ est $x \mapsto 3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})$. Donc par linéarité de la dérivation, on a

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(3\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+3^n\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Exercice 2 :

On considère le polynôme $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5-(X-i)^5\right)$.

1.

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z+i}{z-i} = \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}} \quad k \in \{0,\dots,4\}\\ &\Leftrightarrow \quad z+i = (z-i)\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}} \quad k \in \{0,\dots,4\}\\ &\Leftrightarrow \quad z(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}}) = -i(1+\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}}) \quad k \in \{0,\dots,4\}\\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i(1+\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}})}{(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}})} \quad k \in \{1,\dots,4\} \quad \text{ou} \quad (k=0 \quad \text{et} \quad 0=-i\times 2)\\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}})}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{5}}-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}})} \quad k \in \{1,\dots,4\}\\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i\times 2\cos\frac{k\pi}{5}}{-2i\sin\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}} \quad k \in \{1,\dots,4\}\end{aligned}$$

Comme $P(i) = \frac{(2i)^5}{2i} \neq 0$, le nombre i n'est pas racine de P. Ainsi pour $z \neq i$, on a $P(z)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.

Les racines de P sont donc $\boxed{\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}},\quad k \in \{1,\dots,4\}}$.

2. En développant avec le binôme de Newton, on obtient $P(X) = 5X^4-10X^2+1$. Un nombre complexe z est donc racine de P si et seulement si z^2 est racine de $5X^2-10X+1$. Les racines de ce polynôme sont $\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$, ce sont deux nombres positifs. Les 4 racines de P sont donc

$$\boxed{\pm\sqrt{\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}}}.$$

3. On a clairement
$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$
De plus la fonction tan est strictement croissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\tan x<0$ pour $x\in]\frac{\pi}{2},\pi[$. On a donc $\tan\frac{3\pi}{5}$ et $\tan\frac{4\pi}{5}$ négatifs et $0<\tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{2\pi}{5}$, puis
$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}} > \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}} > 0.$$
Ainsi
$$\tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$
On donc prouvé que
$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}.$$

1. Exemples :
   (a) Donner les racines complexes de $P=X^2-X-1$.
   On a $\Delta=5$, les racine sont $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Donner les racines complexes de $P=X^4+X^3+X^2+X+1$. On remarque déjà que 1 n'est pas racine car $P(1)=5\neq 0$.
   Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $P(z)=0$. Cela équivaut à $\frac{1-z^5}{1-z}=0$ car $z\neq 1$ et donc à $z^5-1=0$. Les racines de P sont donc les racines 5-ièmes de l'unité.
2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$.
   (a) Démontrer que
   $$\left|a_1z+a_2z^2+\cdots a_nz^n\right| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}.$$
   On a
   $$\begin{aligned}\left|a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\right| &\leqslant |a_1z|+|a_2z^2|+\cdots+|a_nz|^n\\ &\leqslant |z|+|z|^2+\cdots+|z|^n\\ &= \frac{|z|-|z|^{n+1}}{1-|z|}\\ &\leqslant \frac{|z|}{1-|z|}\end{aligned}$$
   (b) Si z est une racine de P, on a $P(z)=0$ et donc $|-a_0|=\left|a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\right|$. Ainsi $1\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}$ ce qui donne $1-|z|\leqslant|z|$ et donc $2|z|\geqslant 1$ puis $|z|\geqslant\frac{1}{2}$.
3. On suppose cette fois-ci que z est une racine de P avec $|z|>1$.
   On a comme $z\neq 0$,
   $$\begin{aligned}Q\left(\frac{1}{z}\right) &= a_0\frac{1}{z^n}+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+\cdots+a_{n-2}\frac{1}{z^2}+a_{n-1}\frac{1}{z}+a_n\\ &= \frac{1}{z^n}\left(a_0+a_1z+\cdots+a_{n-2}z^{n-2}+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n\right)\\ &= \frac{P(z)}{z^n}=0\end{aligned}$$
   On conclut donc que $\frac{1}{z}$ est racine du polynôme Q. Or Q est aussi un polynôme à coefficients dans $\{-1,1\}$ et $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ car $|z|>1$, donc d'après la question précédente, $\left|\frac{1}{z}\right|\geqslant\frac{1}{2}$ donc $|z|\leqslant 2$.
4. Un peu de dénombrement
   (a) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1,1\}$ de degré n ? Il y a deux choix pour chaque coefficient, comme il y a $n+1$ coefficients pour un polynôme de degré n, cela fait 2^{n+1} polynômes.
   (b) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1,1\}$ de degré 10 ayant exactement 3 coefficients égaux à $+1$?
   Cela revient à choisir 3 coefficients parmi les 11 et à leur attribuer la valeur 1. Les 8 autres coefficients vaudront alors forcément -1. Il y a $\binom{11}{3}$ polynômes.

Fin