Devoir Vacances N°4

Nombres Réels

Problème A :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $2x^3 + 3x^2 - 27x = 0$
   (b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-1}{x-3}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{3x^2 + 4x + 2} > 2x + 3$.

Problème B :

1. Montrer que pour tous réels x, y on a :
$$(x+y)^2 \geq 4xy$$
2. En déduire que pour tous réels strictement positifs a, b, c, on a :
$$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$$
3. En notant $S = a + b + c$, développer et simplifier le produit :
$$(S-a)(S-b)(S-c)$$
4. Déduire de 2. et 3. que :
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Problème C :

On admet que :
$$(E)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(5x) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $16X^2 - 20X + 5 = 0$.

b) Montrer que : $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

c) Déterminer la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$ en évaluant en $\frac{\pi}{5}$ l'équation (E).

d) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

e) Montrer que $4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2\cos(\frac{\pi}{5}) - 1 = 0$.

f) En déduire une écriture plus simple de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Problème A :

1(a) On a $2x^3+3x^2-27x = x(2x^2+3x-27)$ donc, par règle du produit nul, $x=0$ ou $2x^2+3x-27=0$.

Pour résoudre la deuxième équation, on calcule $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-27) = 225 > 0$.

Donc les deux solutions sont $x_1 = \frac{-3-15}{4} = -\frac{9}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+15}{4} = 3$.

Donc finalement $\boxed{S = \{-\frac{9}{2}; 0; 3\}}$.

(b) On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x=-1$ ou $x=1$. Le domaine de résolution est donc $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$. Sur ce domaine, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} = 1 \\
\iff\quad & \frac{x-1+x+1-(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 0 \\
\iff\quad & \frac{-x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)} = 0 \\
\iff\quad & -x^2+2x+1 = 0 \quad \text{sur le domaine de résolution.}
\end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 8$ et les deux solutions sont $x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = 1-\sqrt{2}$.
$\boxed{S = \{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}}$.

2. On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x=2$ ou $x=3$. Le domaine de résolution est donc $]-\infty;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$. Sur ce domaine, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-1}{x-3} \\
\iff\quad & \frac{(x+1)(x-3)-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \\
\iff\quad & \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} \leq 0
\end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-5}{(x-2)(x-3)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On a donc $\boxed{S =]-\infty; 2[\cup]3; 5]}$.

3. On étudie d'abord le domaine de définition. Pour le polynôme $3x^2 + 4x + 2$, on a $\Delta = -8$ donc le domaine est $\mathbb{R}$. Ensuite, remarquons que si $2x + 3 < 0$, c'est à dire $x < -\frac{3}{2}$ alors x est solution. Il reste à étudier le cas $x \geq -\frac{3}{2}$. On peut ici élever au carré, on obtient alors $3x^2 + 4x + 2 > 4x^2 + 12x + 9$ donc $0 > x^2 + 8x + 7$. Les racines -1 et -7 sont évidentes donc finalement, $\boxed{S =]-\infty; -1[.}$

Problème B :

1. Pour tous réels x, y on a : $(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$ donc $(x + y)^2 \geq 4xy$.

2. Comme a, b, c sont strictement positifs, par passage au carré, on a :
$(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc \iff (b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2 \geq 64a^2b^2c^2$.
Or en appliquant la question 1 avec b, c puis a, c puis a, b, on a :
$(b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2 \geq 4bc \times 4ac \times 4ab = 64a^2b^2c^2$.

3. $(S - a)(S - b)(S - c) = S^3 - S^2(a + b + c) + S(ab + ac + bc) - abc$ or $S = a + b + c$ donc $S^2(a + b + c) = S^3$ et $(S - a)(S - b)(S - c) = S(ab + ac + bc) - abc$.

4. En utilisant 2., on a : $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$ donc $(S-a)(S-b)(S-c) \geq 8abc$.
Een utilisant 3., on obtient $S(ab+ac+bc)-abc \geq 8abc$ donc $S(ab+ac+bc) \geq 9abc$.
Finalement, $\frac{S(ab+ac+bc)}{abc} \geq 9$, c'est à dire $(a + b + c)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \geq 9$.

Problème C :

a) On calcule $\Delta = 400 - 320 = 80$ donc les solutions sont $X_1 = \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

b) Comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $0 < 5 - \sqrt{5} < 4 < 5 + \sqrt{5}$.
Donc $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Et comme tous les termes sont positifs,
$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

c) En remplassant x par $\frac{\pi}{5}$ dans (E) et comme $\sin(\pi) = 0$, on a :
$16\sin^5(\frac{\pi}{5}) - 20\sin^3(\frac{\pi}{5}) + 5\sin(\frac{\pi}{5}) = 0$. Posons alors $X = \sin(\frac{\pi}{5})$, on a :
$16X^5 - 20X^3 + 5X = 0 \iff X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$. En utilisant la question a), on obtient :
$X = 0$ ou $X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.
Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < \sin(\frac{\pi}{5}) < \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc finalement $\boxed{\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$.

d) Comme $\cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, on a :
$\cos(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

e) D'après la question b), on a : $16\sin^4(\frac{\pi}{5}) - 20\sin^2(\frac{\pi}{5}) + 5 = 0$ donc
$16(1-\cos^2(\frac{\pi}{5}))^2 - 20(1-\cos^2(\frac{\pi}{5})) + 5 = 0$ donc $16\cos^4(\frac{\pi}{5}) - 12\cos^2(\frac{\pi}{5}) + 1 = 0$. Or
$4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2\cos(\frac{\pi}{5}) - 1 = 0 \iff 4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1 = 2\cos(\frac{\pi}{5})$
$\iff (4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1)^2 = (2\cos(\frac{\pi}{5}))^2 \iff 16\cos^4(\frac{\pi}{5}) - 8\cos^2(\frac{\pi}{5}) + 1 = 4\cos^2(\frac{\pi}{5})$. CQFD

f) En posant $X = \cos(\frac{\pi}{5})$ dans e), on a $4X^2 - 2X - 1 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, on obtient $\boxed{\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.