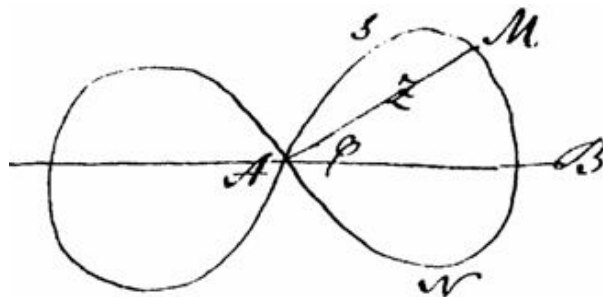


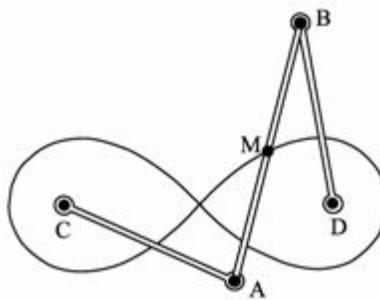
## Suites Numériques

### Devoir Vacances N°5 Bis

En 1694 Jaques Bernoulli publia dans Acta Eruditorum une courbe qu'il appela lemniscate, du grec *lêmniskos* et latin *lemniscatus* qui signifient ruban. Ses recherches sur la courbe élastique l'ont amené à définir cette courbe dont le calcul de la longueur d'un arc conduit plus tard à l'introduction des fonctions elliptiques. La lemniscate de Bernoulli est l'ensemble des points du plan dont le produit des distances à deux points fixes F et F', les foyers de la lemniscate, est constant.



Une équation cartésienne de la lemniscate est donc  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ . Le mécanisme pour la tracer (Cayley) est constitué d'un parallélogramme (croisé) articulé ABCD de côtés  $AC = BD = a$  et  $AB = CD = a^2$ . Les points C et D sont fixés au plan ; quand les points A et B décrivent respectivement les cercles de centres C et D et de rayon  $a$ , le milieu M de (A ;B) décrit la lemniscate de foyers C et D.



La longueur d'un arc de cette courbe (pour  $a = 1$ ) mène à l'intégrale  $\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ , autrement dit à la recherche d'une primitive à la fonction  $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^4}$ . Par analogie avec la relation  $\arcsin'(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$ , on note la longueur de la lemniscate  $2\varpi$  avec

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 2,6220575542921198104648395 \dots$$

Le 30 mai 1799 Carl Friedrich Gauß se rend compte qu'il a déjà calculé un nombre qui a les mêmes décimales que  $\pi/\varpi$ , à savoir la moyenne arithmético-géométrique de 1 et  $\sqrt{2}$ . Il entreprend alors, avec succès, de démontrer cette relation.

Pour définir cette moyenne, prenons  $a$  et  $b$ , deux nombre réels positifs. On définit deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  par  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Autrement dit on prend la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de  $a$  et  $b$ .

Comme la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique et qu'une moyenne est supérieure au plus petit des deux nombres, tout en étant inférieure au plus grand, on en déduit sans peine que  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est décroissante et que  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est croissante.

Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , par inégalité entre moyennes (voir TD 3), on a  $b_n \leq a_n$ .

Comme  $a_{n+1}$  est milieu de  $[b_n; a_n]$ , la distance entre  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  est inférieure à  $(a_n - b_n)/2$ . Il en résulte, par une récurrence immédiate,  $0 \leq a_n - b_n \leq (a - b)/2^n$  et donc que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  sont adjacentes, i.e. monotones de sens contraire avec un écart tendant vers 0.

Il en résulte qu'elles convergent vers une limite commune, notée  $M(a, b)$ . La relation de Gauß est donc  $\pi = \varpi M(1, \sqrt{2})$ .

Lorsque  $a = 1$  et  $b = x$ , on note  $u_n(x)$  la valeur de  $a_n$ ,  $v_n(x)$  celle de  $b_n$  et  $f(x)$  celle de  $M(1, x)$ .

**Le but de ce devoir est de tracer le graphe de  $f$ .** On admettra que  $f$  est croissante et continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

- Démontrer que, pour  $x \geq 0$ , on a  $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$  et en déduire que  $f$  est dérivable au point  $x = 1$ .
- Étudier  $f$  en 0 : valeur, dérivabilité, tangente au graphe.
- Démontrer que, pour  $x > 0$ , on a  $f(x) = xf(1/x)$  et étudier la branche infinie de  $f$  en  $+\infty$ .
- Calculer les valeurs à  $10^{-5}$  près de  $f$  en les points 0,01, 0,1, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 2, 3, 10, 100.
- Représenter graphiquement  $f$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ , ainsi que les fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto (1+x)/2$ .
- Donner une valeur de  $M(1, \sqrt{2})$  obtenue par interpolation.
- Le premier dessin est tiré d'un mémoire d'un mathématicien mort à 27 ans. Quel est son nom ? Comment s'appellent les intégrales du type de celle qui définit  $\varpi$  ?
- (\*) Justifier, au moins heuristiquement, les affirmations admises sur la continuité et la croissance de  $f$ , ainsi que la notation  $\varpi$ .

1. Par définition, pour  $x \in \mathbf{R}_+$ , on a  $u_1(x) = (u_0(x) + v_0(x))/2 = (1+x)/2$  et  $v_1(x) = \sqrt{u_0(x)v_0(x)} = \sqrt{x}$ . Par monotonie, il en résulte

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sqrt{x} = v_1(x) \leq v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) \leq u_1(x) = \frac{1+x}{2}.$$

Remarquons que, par définition,  $f(1) = 1$  puisque les suites  $(u_n(1))_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n(1))_{n \in \mathbf{N}}$  sont constantes et égales à 1. On peut aussi le déduire de l'encadrement précédent.

Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbf{R}_+$  par  $g(x) = \sqrt{x}$  et  $h(x) = (1+x)/2$ . On a  $f(1) = g(1) = h(1) = 1$  et donc l'encadrement précédent entraîne que, pour  $x \geq 0$  et distinct de 1, le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et 1, i.e.  $(f(x) - f(1))/(x - 1)$  est compris entre les taux d'accroissements respectifs de  $g$  et  $h$  entre  $x$  et 1. Les inégalités étant renversées si  $x < 1$  et dans le même sens sinon. Or chacun des taux d'accroissement de  $g$  et  $h$  considérés ont une limite lorsque  $x$  tend vers 1, par dérivabilité des fonctions  $g$  et  $h$ . Cette limite est donnée par  $g'(1)$  et  $h'(1)$  respectivement. Or  $g'(1) = h'(1) = 1/2$  et donc, d'après le théorème d'encadrement des limites, le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et 1 a une limite lorsque  $x$  tend vers 1, et c'est cette quantité commune, à savoir  $1/2$ .

Pour  $x \in \mathbf{R}_+$ , on a  $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$  et  $f$  est dérivable en 1. De plus  $f'(1) = 1/2$ .

2. On a  $v_0(0) = 0$  et donc  $(v_n(0))_{n \in \mathbf{N}}$  est constante égale à 0. Comme  $f(0)$  est la limite de cette suite,  $f(0) = 0$ . Le taux d'accroissement de  $f$  entre 0 et  $x$ , pour  $x > 0$ , est donc donné par  $f(x)/x$ . D'après l'encadrement précédent, on a, pour  $x > 0$ ,  $f(x)/x \geq 1/\sqrt{x}$ . D'après le théorème de comparaison des limites, il en résulte  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)/x = +\infty$  et donc  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais y admet une (demi-)tangente verticale.

On a  $f(0) = 0$  et  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais y admet une (demi-)tangente verticale.

3. Soit  $x > 0$ , on a  $u_1(1/x) = (1 + 1/x)/2 = (1+x)/2x$  et donc  $xu_1(1/x) = u_1(x)$ . De même  $v_1(1/x) = \sqrt{1/x} = \sqrt{x}/x$  et donc  $xv_1(1/x) = v_1(x)$ . Il en résulte, par récurrence sur l'entier non nul  $n$ , qu'on a :  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $xu_n(1/x) = u_n(x)$  et  $xv_n(1/x) = v_n(x)$ . Par passage à la limite il en résulte  $xf(1/x) = f(x)$ .

Remarque : on peut aussi démontrer, pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbf{R}_+$ ,  $M(a, b) = M(b, a)$  et, pour  $\lambda \in \mathbf{R}_+$ ,  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ . En effet dans le premier cas les suites  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont identiques à partir du premier rang. Et dans le second cas elles sont proportionnelles.

Pour  $x > 0$ , on a  $f(x) \geq \sqrt{x}$  et donc, par comparaison des limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . De plus, toujours pour  $x > 0$ , on a  $f(x)/x = f(1/x)$ . Or, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $1/x$  tend vers 0 et donc, **par continuité de  $f$  en 0**,  $f(1/x)$  tend vers  $f(0)$ , i.e. vers 0. En d'autres termes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$ .

Pour  $x > 0$ , on a  $f(x) = xf(1/x)$  et  $f$  admet une branche parabolique de direction horizontale en  $+\infty$ .

4. Pour  $x$  donné, on calcule les valeurs de  $u_n(x)$  et  $v_n(x)$  à partir de  $n = 0$  et pour  $n$  croissant, jusqu'à ce que la différence entre ces deux quantités soit inférieure à la précision voulue. En effet on aura alors  $v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x)$  et donc  $u_n(x)$  est une valeur approchée de  $f(x)$  à  $10^{-5}$  par excès. Le programme Maple suivant :

```
gauss:=proc(a,b,eps) local u,v,z; u:=max(a,b); v:=min(b,a);
```

```
while (u-v>eps) do z:=(u+v)/2; v:=(u*v)^(1/2); u:=z; end do; u; end proc;
precision:=0.00001; f:=x->floor(gauss(1.,x,precision)/precision)*precision;
a:=[0,0.01,0.1,0.2,0.4,0.6,0.8,1,2,3,10,100]; map(x->f(x),a);
```

permet d'obtenir :

On a  $f(0,01) \simeq 0,26216$ ,  $f(0,1) \simeq 0,42504$ ,  $f(0,2) \simeq 0,52080$ ,  $f(0,4) \simeq 0,66579$ ,  
 $f(0,6) \simeq 0,78724$ ,  $f(0,8) \simeq 0,89721$ ,  $f(2) \simeq 1,45679$ ,  $f(3) \simeq 1,86361$ ,  $f(10) \simeq$   
 $4,25040$  et  $f(100) \simeq 26,21668$ .

5. Dans le graphique, la fonction supérieure est

$$x \rightarrow (1+x)/2,$$

la fonction inférieure est racine carrée et  $f$  est comprise entre les deux.

On a une tangente (commune) donnée par  $y = (1+x)/2$  en 1 et une tangente verticale en 0.

La valeur de  $f$  en 0 est nulle.

6. Comme  $\sqrt{2} \simeq 1,4142$ , on peut utiliser différents types d'interpolation. Pour une interpolation linéaire, on peut prendre  $f(1) = 1$  et  $f(2) \simeq 1,45679$  comme base de l'interpolation. On obtient alors  $f(\sqrt{2}) \simeq f(1) + (\sqrt{2} - 1)(f(2) - f(1)) \simeq 1,18920$ .

Mais, toujours avec une interpolation linéaire, on peut faire mieux avec les valeurs calculées précédemment. On connaît en effet  $f(0.6)$  et  $f(0.8)$  et donc aussi  $f(5/3) = 5f(0.6)/3 \simeq 1.31207$ . De même  $f(4/5) = 5f(0.8)/4 \simeq 1.12151$ . On a donc  $f(\sqrt{2}) \simeq f(1,25) + (\sqrt{2} - 1,25)(f(5/3) - f(1.25))/(5/3 - 1,25) \simeq 1,19661$ .

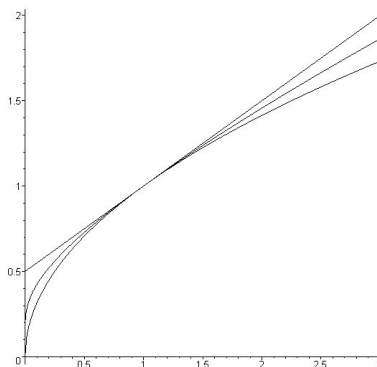
La seule interpolation quadratique (à pas constant) que l'on peut bâtir raisonnablement est celle prenant en compte les valeurs en 1, 2 et 3. La variation de  $f$  entre 0 et 1 interdit de prendre en compte  $f(0)$ . On obtient alors

$$f(\sqrt{2}) \simeq f(1) + (\sqrt{2}-1)(f(2)-f(1)) + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{2!}(f(3)-2f(2)+f(1)) \simeq 1,19527.$$

Par ailleurs un calcul direct donne l'approximation  $f(\sqrt{2}) \simeq 1,19814$ .

On a, par interpolation linéaire entre  $5/4$  et  $5/3$ ,  $f(\sqrt{2}) \simeq 1,19661$ .

7. Le dessin est de Niels Henrik Abel. L'intégrale définissant  $\varpi$  (à prononcer *pi script*) est une intégrale elliptique (de première espèce). Abel est un des génies malheureux des mathématiques. Il a acquis actuellement une reconnaissance importante, ainsi qu'en témoigne le prix Abel qui est la plus haute distinction mathématique pour l'ensemble d'une œuvre. Voir par exemple [http://fr.wikipedia.org/wiki/Niels\\_Henrik\\_Abel](http://fr.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel) ou <http://www.abelprisen.no/en>. On peut aussi noter que la lemniscate de Bernoulli est la figure qui a donné naissance au signe infini. On peut se reporter à l'article du site Images des maths : <http://images.math.cnrs.fr/Coup-d-oeil-sur-la-lemniscate-de.html> ainsi qu'à : <http://www.mathcurve.com/courbes2d/lemniscate/lemniscate.shtml>. Le site Mathcurves contient plein d'autres choses intéressantes!
8. Pour  $n$  fixé, les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sont des fonctions continues, comme on peut le démontrer par récurrence sur l'entier naturel  $n$ . Il est donc naturel d'espérer que leur limite commune



le soit. Ce n'est pas si évident ! On peut néanmoins démontrer que, pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$  et  $x$  dans  $\mathbf{R}_+$ , on a  $0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq 2^{-n}|1-x|$  et donc, pour  $x$  dans  $[0; A]$  et par passage à la limite,  $|f(x) - u_n(x)| \leq 2^{-n}(A+1)$ . Cette majoration entraîne la continuité de  $f$  sur  $[0; A]$  puisque, pour  $x$  et  $y$  dans  $[0; A]$ ,  $|f(x) - f(y)| = |f(x) - u_n(x) + u_n(x) - u_n(y) + u_n(y) - f(y)| \leq 2^{1-n}(A+1) + |u_n(x) - u_n(y)|$  et pour s'assurer que  $|f(x) - f(y)|$  est assez petit il suffit de prendre  $n$  assez grand, puis, par continuité de  $u_n$  de prendre  $x$  et  $y$  assez proches.

La croissance de  $f$  est plus élémentaire. Pour  $n$  fixé dans  $\mathbf{N}$ , les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sont croissantes. Par passage à la limite dans  $x \leq y \Rightarrow u_n(x) \leq u_n(y)$ , on obtient  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

Enfin l'analogie vient de la définition de  $\pi$  comme longueur d'un demi-cercle ou plutôt comme quart de période de la fonction sinus. Le  $\varpi$  en est l'analogue. Il se prononce pi script et est la longueur d'une demi-lemniscate ou encore un quart de période d'une fonction elliptique, le sinus lemniscatique.

