Devoir Maison

Ensembles-Applications

Soit E un ensemble non vide, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On dit qu'un sous-ensemble, $\mathcal{F}$, de $\mathcal{P}(E)$ est du type (Λ) si et seulement s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

- (Λ_1) : $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- (Λ_2) : $\forall (X,Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$
- (Λ_3) : $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) :\ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$
- (Λ_4) : $\emptyset \notin \mathcal{F}$

On notera que $\mathcal{F}$ est bien un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ et non un élément de $\mathcal{P}(E)$.

On appelle cardinal d'un ensemble fini son nombre d'éléments. Le cardinal de l'ensemble E se note $\mathrm{Card}(E)$.

1. Dans cette question uniquement, on prend $E = \{a, b, c\}$.
   (a) Expliciter $\mathcal{P}(E)$.
   (b) Les parties suivantes de $\mathcal{P}(E)$ sont-elles du type (Λ) ? Vous justifierez dans chaque cas votre réponse.
      i. $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.
      ii. $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$.
      iii. $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.
      iv. $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$.
      v. $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.
   (c) Enumérer, en expliquant votre raisonnement, tous les sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ).
2. (a) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il du type (Λ) ?
   (b) Que dire d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie (Λ_3) mais pas (Λ_4) ?
   (c) À quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il du type (Λ) ?
   (d) Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), montrer que $E \in \mathcal{F}$.
3. Soit A une partie non vide de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \in \mathcal{P}(E),\ A \subset X\}$. On dira alors que $\mathcal{F}_A$ est engendré par A.
   (a) Dans l'exemple de la question 1., décrire $\mathcal{F}_{\{a\}}$, $\mathcal{F}_{\{a,b\}}$ et $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}_A$ est du type (Λ).
   (c) On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) et on considère l'application :
   $$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} & \to & \mathcal{F}(E) \\ & A & \mapsto & \mathcal{F}_A \end{array}$$
   Montrer que Γ est injective.
4. On suppose, dans cette question, que E est un ensemble infini. On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}(E)$ est du type (Λ).
   (b) L'application Γ est-elle surjective ?
5. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), on suppose dans cette question que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie finie de E.
   (a) Justifier l'existence d'un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal, on le note A.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}$ est engendré par A.
   (c) Dans le cas où E est un ensemble fini non vide, montrer que Γ est une bijection.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Quel est le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) ?

La principale difficulté de ce problème est le niveau d'abstraction. En effet, l'étude menée concerne certains sous-ensembles de l'ensemble des sous-ensembles de E. Ces sous-ensembles du type (Λ) sont plus communément appelés des filtres. Les filtres sont un outil abstrait pour généraliser la notion de limite, mais l'objet du problème est plutôt d'étudier les propriétés élémentaires de ces objets que leur utilisation poussée.

1. (a) On a immédiatement :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}}$$

(b) i. $\mathcal{F}_1$ n'est pas du type (Λ) car la condition (Λ_1) n'est pas vérifiée.

ii. $\mathcal{F}_2$ n'est pas du type (Λ) car $\emptyset \in \mathcal{F}_2$ ce qui contredit la condition (Λ_4).

iii. $\mathcal{F}_3$ n'est pas du type (Λ) car $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{F}_3$. La condition (Λ_2) n'est ainsi pas vérifiée.

iv. $\mathcal{F}_4$ n'est pas du type (Λ) car $\{a\} \in \mathcal{F}_4$ et $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, pourtant $\{a,b,c\} \notin \mathcal{F}_4$. La condition (Λ_3) n'est ainsi pas vérifiée.

v. $\mathcal{F}_5$ est du type (Λ). Les conditions (Λ_1) et (Λ_4) sont clairement vérifiées. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{F}_5$ est encore un élément de $\mathcal{F}_5$, ce qui fait que la condition (Λ_2) est satisfaite. Enfin, si l'on prend un élément de $\mathcal{F}_5$, on vérifie sans difficulté que les parties de E contenant cet élément sont encore dans $\mathcal{F}_5$, ce qui constitue la condition (Λ_3).

(c) Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), déjà $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Il y a différents cas à distinguer :

- Si $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors la condition (Λ_3) impose que $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ et $\{a,b,c\}$ soient également des éléments de $\mathcal{F}$. Par contre $\{b\}$, $\{c\}$ et $\{b,c\}$ ne peuvent être des éléments de $\mathcal{F}$ puisque leurs intersections respectives avec $\{a\}$ est réduite à l'ensemble vide ce qui contredirait la condition (Λ_2). On obtient dans ce cas :

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- Si $\{b\} \in \mathcal{F}$, le raisonnement est identique au précédent et on obtient :

$$\mathcal{F} = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

On suppose dans les cas à venir que $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$ ne sont pas des éléments de $\mathcal{F}$ pour ne pas retomber dans l'un des cas précédents.

- Si $\{a,b\} \in \mathcal{F}$, alors la condition (Λ_3) impose que $\{a,b,c\}$ soit également un élément de $\mathcal{F}$. Par contre, $\{a,c\}$ et $\{b,c\}$ ne peuvent être des éléments de $\mathcal{F}$ puisque leurs intersections respectives avec $\{a,b\}$ seraient $\{a\}$ ou $\{b\}$ ce que l'on a exclu. Finalement :

$$\mathcal{F} = \{\{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{a,c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{b,c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

► Enfin si les ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ et $\{b,c\}$ ne sont pas des éléments de $\mathcal{F}$, comme $\mathcal{F}$ est non vide d'après la condition (Λ_1), c'est que :

$$\mathcal{F} = \{\{a,b,c\}\}$$

Pour résumer, les sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) sont au nombre de 7, il y a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,b\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,b,c\}\} \end{array}}$$

2. (a) On a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, ceci contredit la condition (Λ_4), ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ n'est pas du type } (\Lambda)}$$

(b) Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (Λ_3) mais pas (Λ_4), alors $\emptyset \in \mathcal{F}$. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, on a $\emptyset \subset Y$, donc d'après (Λ_3), on a $Y \in \mathcal{F}$. On obtient dans ce cas :

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)}$$

(c) Supposons que E possède deux éléments distincts x et y. On a $\{x\}$ et $\{y\}$ qui appartiennent à $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, ainsi d'après (Λ_2), on a $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})$ ce qui est absurde. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ). Si E possède un unique élément x, il est clair que $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est du type (Λ).
Finalement :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \text{ est du type } (\Lambda) \text{ si et seulement si } E \text{ est un singleton}}$$

(d) D'après (Λ_1), on a $\mathcal{F}$ qui est non vide, il existe ainsi $A \in \mathcal{F}$. On a $A \subset E$ donc d'après (Λ_3), il vient $E \in \mathcal{F}$. Quelque soit $\mathcal{F}$ du type (Λ), on a :

$$\boxed{E \in \mathcal{F}}$$

3. (a) D'après la définition $\mathcal{F}_{\{a\}}$ a pour éléments les sous-ensembles de E contenant $\{a\}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a\}} = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}}$$

Avec le même type de raisonnement, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a,b\}} = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\}}$$

et

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a,b,c\}} = \{\{a,b,c\}\}}$$

On retrouve dans chaque cas des sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) trouvés à la question 1.(c).

(b) Vérifions les 4 propriétés requises :

► On a $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$ puisque $A \in \mathcal{F}_A$ étant donné que $A \subset A$. Ce qui montre que (Λ_1) est vérifiée.

► Prenons deux éléments de $\mathcal{F}_A$, que nous notons X et Y. On a par définition de $\mathcal{F}_A$: $A \subset X$ et $A \subset Y$, d'où $A \subset X \cap Y$. Ceci démontre que $X \cap Y \in \mathcal{F}_A$, la propriété (Λ_2) est ainsi satisfaite.

► Prenons $X \in \mathcal{F}_A$, c'est-à-dire $A \subset X$. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \subset Y$, on a alors : $A \subset X \subset Y$. Ce qui montre que $Y \in \mathcal{F}_A$, la propriété (Λ_3) est vraie.

► Enfin, il est clair que $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$ puisque A n'est pas inclus dans l'ensemble vide, A étant supposé non vide.

Finalement, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}_A \text{ est du type } (\Lambda)}$$

(c) Remarquons déjà que l'application Γ est correctement définie puisque, d'après la question précédente, $\mathcal{F}_A$ est du type (Λ) donc est un élément de $\mathcal{F}(E)$.

Pour montrer l'injectivité, prenons A et B deux parties non vides de E et supposons que $\Gamma(A) = \Gamma(B)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$ et tâchons de montrer que $A = B$. On a $A \in \mathcal{F}_A$, donc $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire que $B \subset A$. De même, on a $B \in \mathcal{F}_B$, donc $B \in \mathcal{F}_A$, c'est-à-dire que $A \subset B$. Finalement, d'après le principe de double inclusion, on vient de démontrer que $A = B$, d'où :

$$\boxed{\Gamma \text{ est injective}}$$

4. (a) Convenons de noter $\overline{A} = C_E A$ où A est une partie de E. Vérifions les 4 propriétés requises :

► Remarquons que E est le complémentaire de l'ensemble vide qui est bien une partie finie de E. Ceci montre que $E \in \mathcal{I}(E)$, ainsi $\mathcal{I}(E)$ est non vide et (Λ_1) est vérifiée.

► Prenons deux éléments de $\mathcal{I}(E)$, que nous notons X et Y, par définition $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des ensembles finis. On a $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, or $\overline{X} \cup \overline{Y}$ est fini comme union d'ensembles finis. On vient de montrer que le complémentaire dans E de $X \cap Y$ est fini, d'où $X \cap Y \in \mathcal{I}(E)$ et par suite (Λ_2) est satisfaite.

► Soit $X \in \mathcal{I}(E)$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ avec $X \subset Y$, tâchons de montrer que $Y \in \mathcal{I}(E)$ c'est-à-dire que son complémentaire dans E est fini. On a $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$, ainsi $\overline{Y}$ est inclus dans un ensemble fini donc est lui-même fini. Ceci montre que (Λ_3) est vérifiée.

► Enfin, on a bien $\emptyset \notin \mathcal{I}(E)$ puisque son complémentaire, E, est un ensemble infini par hypothèse.

$$\boxed{\mathcal{I}(E) \text{ est du type } (\Lambda)}$$

(b) La question précédente montre que $\mathcal{I}(E) \in \mathcal{F}(E)$, montrons justement que $\mathcal{I}(E)$ n'a pas d'antécédent par Γ ce qui mettra en défaut la surjectivité de Γ. Par l'absurde, supposons qu'il existe A une partie non vide de E telle que $\mathcal{I}(E) = \mathcal{F}_A$. Comme $A \in \mathcal{F}_A$, on doit avoir $\overline{A}$ fini. D'autre part, A étant non vide, il existe $a \in A$, la partie $A \setminus \{a\}$ a pour complémentaire dans E l'ensemble $\overline{A} \cup \{a\}$ qui est encore un ensemble fini. Ceci montre que $A \setminus \{a\} \in \mathcal{F}_A$ mais pourtant l'inclusion $A \subset (A \setminus \{a\})$ est clairement fausse, d'où l'absurdité.

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est infini }, \Gamma \text{ n'est pas surjective}}$$

5. (a) On va prendre un élément de $\mathcal{F}$ qui a un nombre d'éléments minimal, cet élément va exister puisque tous les éléments de $\mathcal{F}$ n'ont pas une infinité d'éléments d'après l'hypothèse. Pour formaliser cela mathématiquement notons B une partie de $\mathcal{F}$ ayant un nombre fini d'éléments et considérons l'ensemble :

$$R = \{\text{Card}(C),\ C \in \mathcal{F} \text{ et } C \text{ fini}\}$$

L'ensemble R est composé d'entiers naturels, il est non vide puisque $\text{Card}(B) \in R$. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Il existe ainsi un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal que l'on note A.

(b) Afin d'avoir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$, il s'agit de montrer que $\forall X \in \mathcal{F}$, on a $A \subset X$. On a d'après la propriété (Λ_2), $D = A \cap X \in \mathcal{F}$, ceci implique que $\text{Card}(D) \leq \text{Card}(A)$. Le nombre d'éléments de A étant minimal ceci impose $\text{Card}(D) = \text{Card}(A)$. Or par construction $D \subset A$, ajouté au fait que D et A ont le même nombre d'éléments ceci montre que $A \subset X$ qui était le résultat recherché.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{F}_A}$$

(c) Si E est un ensemble fini non vide, montrons que Γ est surjective, pour cela prenons $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(E)$ et tâchons de lui trouver un antécédent par Γ. L'ensemble E étant fini, $\mathcal{F}$ possède bien un élément ayant un cardinal fini non nul puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ainsi la question précédente s'applique et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \Gamma(A)$ avec A une partie non vide de E appartenant à $\mathcal{F}$, de cardinal minimal.

En combinant cela avec l'injectivité de Γ démontrée à la question 3.(c), on a :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est fini non vide alors } \Gamma \text{ est bijective}}$$

(d) Lorsque deux ensembles finis sont en bijection alors ils ont le même nombre d'éléments. Le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ de type (Λ), c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{F}(E)$, est égal au cardinal de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Or si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n, ainsi le cardinal de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est $2^n - 1$, ce qui est d'ailleurs vérifié dans le cas particulier de la question 1.

On a démontré que si E est un ensemble fini non vide de cardinal n alors :

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{F}(E)) = 2^n - 1}$$