Préparation

– Devoir surveillé n° 1 –

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{5^{k+2}}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
3. $S_3 = \sum_{k=3}^{2n} 2^k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k$
5. $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \left(2k^2 + k^3 - 2\right)$

Exercice 2 Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Partie 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition $\mathcal{P}$ suivante :

$$\mathcal{P} \ : \ \exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < t.$$

1. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.
2. Donner un exemple de fonction qui vérifie $\mathcal{P}$.
3. Donner un exemple de fonction ne vérifiant pas $\mathcal{P}$.

Partie 2

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
   a. $\mathcal{P}_1 : \exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(t) < x$
   b. $\mathcal{P}_2 : \forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < t$
   c. $\mathcal{P}_3 : \forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(t) < x$

Partie 3

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer ou réfuter toutes les implications possibles entre les trois propositions suivantes.

$$\mathcal{Q}_1 : x \leqslant y, \qquad \mathcal{Q}_2 : x^2 \leqslant y^2, \qquad \mathcal{Q}_3 : |x| \leqslant |y|$$

Exercice 3 Le but de cet exercice est de déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n+m) = f(n)\,f(m)$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
2. *Premier cas : on suppose que* $f(0) = 0$: déterminer alors f.
3. *Deuxième cas : on suppose que* $f(0) \neq 0$: on note alors $f(1) = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ en fonction de α.
4. Conclure.

Exercice 4 Dans cet exercice on souhaite démontrer le résultat vu en cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. On se donne donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

On rappelle que l'on appelle *équation caractéristique* associée à cette relation de récurrence l'équation :

$$x^2 - ax - b = 0$$

1. On se place *dans cette question* dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes notées q_1 et q_2.
   (a) Donner la forme factorisée de $x^2 - ax - b$ et en déduire que l'on a :
   $$\begin{cases} q_1 + q_2 &= a \\ q_1 q_2 &= -b \end{cases}$$
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n = u_{n+1} - q_1 u_n \text{ et } w_n = u_{n+1} - q_2 u_n$$
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (d) Conclure en retrouvant la forme donnée dans le théorème du cours.
   (e) *Une application :* soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $$u_0 = 0, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$$
   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On se place *dans cette question* dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double notée q_0.
   (a) Montrer que $2q_0 = a$ et $q_0^2 = -b$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - q_0 u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Exprimer v_{n-1} en fonction de v_{n-1-k}.
   (d) En déduire que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad q_0^k u_{n-k} - q_0^{k+1} u_{n-k-1} = q_0^{n-1} v_0$$
   (e) Retrouver le résultat du cours en sommant la relation obtenue à la question précédente pour k variant de 0 à $n-1$.
   (f) *Une application :* soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $$u_0 = 5, u_1 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$
   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5 Les deux parties de cet exercice sont pour une large part indépendantes.

Première partie

Soit (u_n) une suite de réels *strictement positifs*, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \dots u_n$$

1. Montrer que si la suite (p_n) converge vers une limite non nulle alors (u_n) converge vers 1.
   Indication : on pourra considérer le quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$.
2. Soit un réel $a \in]0, \pi/2[$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
   On pose $u_p = \cos\left(\dfrac{a}{2^p}\right)$ et donc $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \cos\left(\dfrac{a}{2^p}\right)$.
   (a) On rappelle que pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$. Montrer que (q_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \sin(a) \times \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.
   (c) On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En déduire que (p_n) converge et donner sa limite.

Deuxième partie

Dans cette partie on considère un entier non nul n.

On rappelle le théorème de convergence monotone pour les suites : une suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) est convergente.

1. Si (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0, on lui associe désormais la suite (p_n) définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$$
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} v_p$.
   (a) Montrer que les suites (S_n) et (p_n) sont croissantes.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1 + x) \leqslant x$.
   (c) En déduire que, si la suite (S_n) converge, alors la suite (p_n) converge.
2. *Une application :* soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.
   (a) Simplifier l'expression du terme général de la suite (p_n) et donner sa limite.
   (b) En déduire la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.
3. *Une autre application :* soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} (1 + a^{2^p}) = (1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)(1 + a^{16}) \dots (1 + a^{2^n})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Quelle est la limite de (p_n) lorsque $a \geqslant 1$?
   (b) On suppose $a \in]0, 1[$.
      i. Montrer que : $\forall p \geqslant 1,\ 2^p \geqslant p$.
      ii. En déduire en utilisant la question 1.(c) que (p_n) converge.
      iii. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la quantité $(1 - a^2)p_n$, et en déduire la limite de (p_n).

Proposition de solutions

Solution 1

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{5^{k+2}} = \frac{1}{5^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{5^k} = \frac{1}{5^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k$

   Or $\frac{3}{5} \neq 1$ donc $S_1 = \frac{1}{5^2} \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{10}$.

2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ par télescopage.

3. $S_3 = \sum_{k=3}^{2n} 2^k = 2^3 \frac{1-2^{2n-3+1}}{1-2} = 8\left(2^{2n-2}-1\right)$.

4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}3^k$ car le terme obtenu pour $k=0$ est nul.

   Donc d'après la petite formule : $S_4 = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}3^k = n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}3^{j+1}$ en effectuant le changement d'indice $j = k+1$.

   Donc d'après la formule du binôme de Newton, $S_4 = 3n(3+1)^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}n$.

5. $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \left(2k^2 + k^3 - 2\right) = \sum_{k=0}^{n} 2k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=0}^{n} 2$

   Donc d'après le cours : $S_5 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2(n+1) = \frac{4n(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2 - 24(n+1)}{12}$

   Donc $S_5 = \frac{(n+1)\left(4n(2n+1) + 3n^2(n+1) - 24\right)}{12} = \frac{(n+1)\left(3n^3 + 11n^2 + 4n - 24\right)}{12}$

Solution 2

1. Non $\mathcal{P}$: $\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant t$.
2. La proposition $\mathcal{P}$ est donc « la fonction f est majorée ». C'est le cas, par exemple, de $f : x \longmapsto -x^2$.
3. La fonction exponentielle (par exemple) n'est pas majorée donc ne vérifie pas $\mathcal{P}$.
4. a. La proposition $\mathcal{P}_1$ est fausse. Pour le justifier, montrons que non $\mathcal{P}_1$ est vraie, c'est-à-dire que :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant x$$

   En effet soit $t \in \mathbb{R}$, le réel $x = f(t) - 1$ vérifie bien $f(t) \geqslant x$.

   b. La proposition $\mathcal{P}_2$ est fausse pour certaines fonctions. Par exemple pour $f : x \longmapsto x^2$, montrons que non $\mathcal{P}_2$ est vraie, c'est-à-dire montrons que : $\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant t$.
   En effet le réel $t = -1$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant t$.

   c. La proposition $\mathcal{P}_3$ est vraie : en effet soit $t \in \mathbb{R}$. Le réel $x = f(t) + 1$ vérifie bien $f(t) < x$.
5. $\mathcal{Q}_1 \Longrightarrow \mathcal{Q}_2$ est fausse car $-2 \leqslant 1$ et $(-2)^2 > 1^2$.
   $\mathcal{Q}_2 \Longrightarrow \mathcal{Q}_1$ est fausse car $0^2 \leqslant (-1)^2$ mais $0 > -1$.
   $\mathcal{Q}_1 \Longrightarrow \mathcal{Q}_3$ est fausse car $-2 \leqslant 1$ et $|-2| > |1|$.
   $\mathcal{Q}_3 \Longrightarrow \mathcal{Q}_1$ est fausse car $|0| \leqslant |-1|$ mais $0 > -1$.
   $\mathcal{Q}_2 \Longrightarrow \mathcal{Q}_3$ est vraie par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et car $\sqrt{x^2} = |x|$ et $\sqrt{y^2} = |y|$.
   $\mathcal{Q}_3 \Longrightarrow \mathcal{Q}_2$ est vraie par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et car $|x|^2 = x^2$ et $|y|^2 = y^2$.

Solution 3 Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : on considère f une solution du problème posé.

1. En posant $n = m = 0$, on obtient :

   $$f(0+0) = f(0)f(0) \Longleftrightarrow f(0) = \left(f(0)\right)^2 \Longleftrightarrow \left(f(0)\right)^2 - f(0) = 0 \Longleftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right) = 0 \Longleftrightarrow f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs possibles de } f(0) \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$.
2. *Premier cas : on suppose que* $f(0) = 0$
   Soit alors $n \in \mathbb{N}$.
   $f(n) = f(n+0) = f(n)f(0)$ par définition de f. Donc $f(n) = 0$.
   Ceci étant vrai pour tout entier n, on en conclut que $\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$.
3. *Deuxième cas : on suppose que* $f(0) \neq 0$
   Le calcul des premiers termes permet de conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \alpha^n$. Montrons le par récurrence.
   - *Initialisation :* $f(0) \neq 0$ donc d'après la question 1, $f(0) = 1 = \alpha^0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$.
     Par définition de la fonction f, $f(n+1) = f(n)f(1) = \alpha^n\alpha$ d'après l'hypothèse de récurrence.
     Donc $f(n+1) = \alpha^{n+1}$ et la propriété est héréditaire.
   - *Conclusion :* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \alpha^n$.

4. Pour conclure il faut faire la synthèse. On vérifie immédiatement que la fonction nulle vérifie bien la relation donnée. De même, si on considère $\alpha \in \mathbb{N}$ et si on pose, pour tout entier n, $f(n) = \alpha^n$, alors f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n+m) = \alpha^{n+m} = \alpha^n \alpha^m = f(n) f(m)$$

Conclusion : $\boxed{\text{les fonctions solutions sont la fonction nulle et les fonctions de la forme } f(n) = \alpha^n \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}.}$

Solution 4 1. (a) L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes q_1 et q_2 donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - ax - b = (x - q_1)(x - q_2)$$

Or pour tout réel x, $(x-q_1)(x-q_2) = x^2 - (q_1+q_2)x + q_1 q_2$, donc, comme deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux, on a bien le système :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 &= a \\ q_1 q_2 &= -b \end{cases}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - q_1 u_{n+1} \\ &= a u_{n+1} + b u_n - q_1 u_{n+1} \text{ par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (q_1+q_2) u_{n+1} - q_1 q_2 u_n - q_1 u_{n+1} \text{ d'après la question précédente} \\ &= q_2 u_{n+1} - q_1 q_2 u_n \\ &= q_2 (u_{n+1} - q_1 u_n) \\ v_{n+1} &= q_2 v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } q_2.}$

(c) La symétrie des rôles joués par q_1 et q_2 assure que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q_1.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après les deux questions précédentes :

$$\begin{cases} v_n &= v_0 \times q_2^n \\ w_n &= w_0 \times q_1^n \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u_{n+1} - q_1 u_n &= (u_1 - q_1 u_0) q_2^n \\ u_{n+1} - q_2 u_n &= (u_1 - q_2 u_0) q_1^n \end{cases}$$

En soustrayant la ligne 1 à la ligne 2, on obtient : $(q_1 - q_2) u_n = (u_1 - q_2 u_0) q_1^n - (u_1 - q_1 u_0) q_2^n$.
Comme $q_1 \neq q_2$, on a finalement :

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{q_1 - q_2}\left((u_1 - q_2 u_0) q_1^n - (u_1 - q_1 u_0) q_2^n\right).}$

(e) L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $x^2 + x - 2 = 0$ qui a deux solutions distinctes $q_1 = 1$ et $q_2 = -2$.
Donc d'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{1+2}\left((3 + 2\times 0)1^n - (3 + 2 \times 0)(-2)^n\right) = \frac{1}{3}\left(3 - 3(-2)^n\right)$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-2)^n.}$

2. (a) L'équation caractéristique admet une racine double q_0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - ax - b = (x - q_0)^2$$

Or pour tout réel x, $(x - q_0)^2 = x^2 - 2q_0 x + q_0^2$, donc, comme deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux, on a bien

$$2q_0 = a \text{ et } q_0^2 = -b$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - q_0 u_{n+1} \\ &= a u_{n+1} + b u_n - q_0 u_{n+1} \text{ par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= 2q_0 u_{n+1} - q_0^2 u_n - q_0 u_{n+1} \text{ d'après la question précédente} \\ &= q_0 u_{n+1} - q_0^2 u_n \\ &= q_0 (u_{n+1} - q_0 u_n) \\ v_{n+1} &= q_0 v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } q_0.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q_0 donc

$$v_{n-1} = q_0^k v_{n-1-k}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la question précédente, $v_{n-1} = q_0^k v_{n-1-k}$.
Or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q_0 donc : $v_{n-1} = q_0^{n-1} v_0$.
D'autre part, par définition, $v_{n-1-k} = u_{n-k} - q_0 u_{n-1-k}$ donc $q_0^k v_{n-1-k} = q_0^k u_{n-k} - q_0^{k+1} u_{n-k-1}$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad q_0^k u_{n-k} - q_0^{k+1} u_{n-k-1} = q_0^{n-1} v_0.}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons la relation obtenue à la question précédente pour k variant de 0 à $n-1$:
$\sum_{k=0}^{n-1} \left(q_0^k u_{n-k} - q_0^{k+1} u_{n-k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} q_0^{n-1} v_0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} q_0^k u_{n-k} - \sum_{j=0}^{n} q_0^j u_{n-j} = n q_0^{n-1} v_0$ donc, par télescopage :
$u_n - q_0^n u_0 = n q_0^{n-1} v_0$.
La formule reste valable pour $n = 0$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q_0^n + n q_0^{n-1} (u_1 - q_0 u_0).}$

(f) L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $x^2 - 6x + 9 = 0$ qui a une racine double $q_0 = 3$.
Donc d'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 5 \times 3^n + (6 - 3 \times 5)\, n 3^{n-1}$$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (5-3n)3^n.}$

Solution 5 **Première partie**

1. Il est clair que pour tout entier naturel n non nul, $p_n \neq 0$.
$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\prod_{p=1}^{n+1} u_p}{\prod_{p=1}^{n} u_p} = u_{n+1}.$$
Or si la suite (p_n) converge vers une limite non nulle notée ℓ, alors par continuité le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$, soit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$. Montrons que (q_n) est une suite géométrique.
On vérifie d'abord que pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$, ce qui est assuré par le fait que $a \in]0, \pi/2[$. Il est alors clair que pour tout entier naturel n non nul, $q_n \neq 0$. On calcule donc $\frac{q_{n+1}}{q_n}$:
$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{p_{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}{p_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$
Donc $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}$
La suite (q_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme
$q_1 = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \boxed{\frac{\sin(a)}{2}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $q_n = \frac{\sin(a)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sin(a) \left(\frac{1}{2}\right)^n$
D'où $p_n = \frac{q_n}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \sin(a) \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.

(c) Rappel : par définition du nombre dérivé, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n} = 0$ donc par composition
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{1}{a}$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\sin(a)}{a}}$.

Deuxième partie

1. (a) D'une part $S_{n+1} - S_n = v_{n+1} > 0$, ce qui assure que la suite (S_n) est croissante.
D'autre part une récurrence immédiate assure que pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0$. On calcule donc :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\prod_{p=1}^{n+1}(1+v_p)}{\prod_{p=1}^{n}(1+v_p)} = 1 + v_{n+1} \geqslant 1.$$

On a donc pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0$ et $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1$, donc la suite (p_n) est croissante.

(b) Pour montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant x$, on peut étudier le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.
<u>Autre méthode :</u>
Montrons que pour tout réel positif ou nul t on a : $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$.
En effet $t \geqslant 0 \Longrightarrow 1+t \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.
Montrons maintenant que, pour $x \geqslant 0$: $\ln(1+x) \leqslant x$.
Pour cela, on considère $x \geqslant 0$. L'inégalité précédente est vraie pour tout $t \in [0;x]$. Par ailleurs les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto 1$ sont continues donc intégrables. Enfin l'intégrale conserve l'ordre, donc on a :
$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, soit : $[\ln(1+t)]_0^x \leqslant [t]_0^x$
On a donc bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

(c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_p > 0$ donc, d'après la question précédente, $\ln(1+v_p) \leqslant v_p$.
En sommant pour $p = 1$ à n, on obtient donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p) \leqslant \sum_{p=1}^{n} v_p$.
Or on remarque que $\ln(p_n) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p)$, donc on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) \leqslant S_n$, donc $\boxed{p_n \leqslant e^{S_n}}$.
Supposons que la suite (S_n) converge. Elle est alors bornée donc majorée par un réel M. La suite (p_n) est alors croissante et également majorée par e^M. Elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone.
On a donc bien montré que si la suite (S_n) converge, alors (p_n) converge.

2. (a) $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{n+1}{1} = n+1.$
Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty}$.

(b) On vérifie aisément qu'on est bien dans les conditions d'application du résultat de la question précédent et on a donc, par contraposition, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. (a) Il est clair que si $a \geqslant 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 2^n$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty}$.

(b) i. On montre aisément par récurrence que : $\forall p \geqslant 1$, $2^p \geqslant p$.

ii. $\forall a \in]0;1[$, $a^{2^p} \leqslant a^p$, donc $p_n \leqslant \displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+a^p) = (1+a)(1+a^2)(1+a^3)(1+a^4)\dots(1+a^n)$
On est alors dans les conditions d'application du résultat démontré à la question 1., et on a donc :
$S'_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=1}^{n} a^p = a\frac{1-a^n}{1-a}$ car $a \neq 1$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \dfrac{a}{1-a}$, donc (S'_n) converge, ce qui assure que $\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+a^p)$ converge, puis que (p_n) converge.

iii. Soit n un entier naturel non nul.
$(1-a^2)p_n = (1-a^2)\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+a^{2^p}) = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})\dots(1+a^{2^n})$
$(1-a^2)p_n = (1-a^4)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})\dots(1+a^{2^n}) = (1-a^8)(1+a^8)(1+a^{16})\dots(1+a^{2^n})$
Donc on montre par récurrence que $(1-a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{1-a^2}}$.