Devoir Surveillé N°1

Logie
Nombres Complexes

Lundi 7 Octobre 2019

Durée : 2 heures

Exercice 1 — **(Quantificateurs).**

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (où u désigne une suite réelle *). Uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses.

a/ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ *(la suite u est croissante)*

b/ $\exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n$ *(la suite u est périodique)*

c/ $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [|u_n - \ell| < \varepsilon]$ *(la suite u est convergente)*

2/ Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[u_n = u_m] \Longrightarrow [n = m]$$

Exercice 2 — **(Sommes diverses).** Dans cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque, et x un réel quelconque également. Calculer chacune des sommes suivantes † :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{k-1}}{5^k}\,; \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} x^{2k}\,; \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k\,; \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 3 — **(Cours... et application).** Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque.

1/ On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$. Rappeler la formule donnant S_n en fonction de n, et la redémontrer.

2/ On rappelle que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1.$ ‡

a/ En reconnaissant une formule de référence, calculer la somme : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^5 - k^5\right]$

b/ En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)}{30}$

Exercice 4 — **(Logique).** On note C l'ensemble des étudiants de MPSI du lycée Jean Bart, F l'ensemble des filles de C et G l'ensemble des garçons de C. On va former des propositions concernant l'âge et/ou les relations d'amitié entre éléments de C : lorsque x et y désigne deux élèves de C (on peut avoir éventuellement $x = y$), on notera

- pour l'âge,

« x est plus jeune que y » par $x \leqslant y$

- pour les relations d'amitié,

« x aime y » par $x \heartsuit y$

et

« x n'aime pas y » par $x \not\heartsuit y$

Traduire les phrases suivantes sous forme de proposition logiques avec des quantificateurs. §

1/ « l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque »
2/ « chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas »
3/ « les amis de mes amis sont mes amis »
4/ « le plus âgé des élèves est un garçon et il aime toutes les filles »
5/ « personne n'aime personne »
6/ « les personnes qui ont trop d'amour propre ne sont pas aimées des autres »

Exercice 5 — **(Factorielles).** Soit (u_n) la suite réelle définie en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

Exercice 6 :

Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}$. ¶

Exercice 7 :

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ uniquement en fonction de $\cos\theta$.

3. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 8 :

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}$ où $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

2. Résoudre de deux façons l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. En déduire les valeurs de $\text{cotan}\,\dfrac{\pi}{5}$, $\text{cotan}\,\dfrac{2\pi}{5}$, $\text{cotan}\,\dfrac{3\pi}{5}$ et $\text{cotan}\,\dfrac{4\pi}{5}$.

Exercice 9 :

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$\mathrm{S} = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \qquad\qquad \mathrm{T} = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. **a.** Montrer que $\sin\dfrac{6\pi}{11} + \sin\dfrac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{S}) > 0$.

b. Montrer que $\mathrm{S}+\mathrm{T} = -1$ et $\mathrm{ST} = 3$.

c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T.

2. **a.** Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\dfrac{2\pi}{11}$.

b. Montrer que $\dfrac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i\tan\dfrac{3\pi}{11}$.

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = \dfrac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$.

d. En déduire que $\tan\dfrac{3\pi}{11} + 4\sin\dfrac{2\pi}{11} = i(\mathrm{T}-\mathrm{S}) = \sqrt{11}$.

Exercice 10 :

Bonus 1 :

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Bonus 2 :

On pose pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $\mathrm{S}_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}\mathrm{S}_j(n) = (n+1)^{p+1}$$

Corrigé

Exercice 1 — (Quantificateurs).

1/ a/ La négation de $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ est : $\boxed{\exists\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n}$

b/ La négation de $(\exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n)$ est : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+k} \neq u_n}$

c/ La négation de $(\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [|u_n - \ell| < \varepsilon])$ est :

$$\boxed{\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \wedge [|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon]}$$

2/ La réciproque de $[u_n = u_m] \Longrightarrow [n = m]$ est $\boxed{[n = m] \Longrightarrow [u_n = u_m]}$.

La négation de $[u_n = u_m] \Longrightarrow\ [n = m]$ est $\boxed{[u_n = u_m] \wedge [n \neq m]}$.

La contraposée de $[u_n = u_m] \Longrightarrow\ [n = m]$ est $\boxed{[n \neq m] \Longrightarrow [u_n \neq u_m]}$.

Exercice 2 — (Sommes diverses). Dans cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque, et x un réel quelconque également.

1/ Soit n un entier naturel quelconque. On a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{k-1}}{5^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1-(4/5)^{n+1}}{1-(4/5)} = \frac{1}{4} \times \frac{1-(4/5)^{n+1}}{(1/5)} \quad \text{d'où : } \boxed{S_1 = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)}$$

2/ Soit n un entier naturel quelconque. On a : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x^2\right)^k$. On reconnaît une somme de termes d'une suite géométrique de raison x^2, dont le calcul nécessite que l'on distingue le cas où $x^2 = 1$ (càd lorsque $x = \pm 1$) et le cas où $x^2 \neq 1$.

Explicitement : $\boxed{S_2 = \begin{cases} n & \text{si } x = \pm 1 \\ x^2\,\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \end{cases}}$

3/ Soit n un entier naturel quelconque. On a : $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$. On reconnaît une somme de termes d'une suite géométrique de raison $(-x)$, * dont le calcul nécessite que l'on distingue le cas où $-x = 1$ (càd lorsque $x = -1$) et le cas où $x \neq -1$.

Explicitement : $\boxed{S_3 = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \end{cases}}$

4/ Soit n un entier naturel quelconque. On a :

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

Cette dernière somme est télescopique et on a donc : $\boxed{S_4 = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}}$

Exercice 3 — **(Cours... et application).** Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque.

1/ On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. D'après le cours : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

➤ Notons $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$, et d'autre part $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

Soit finalement : $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, cette égalité signifiant que $P(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2/ On rappelle que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.[†]

a/ La somme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^5 - k^5\right]$ est télescopique et on a donc : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = (n+1)^5}$.

b/ D'après la question précédente on a : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^5 - k^5\right] = (n+1)^5 \qquad (\spadesuit)}$

D'autre part, d'après l'indication de l'énoncé on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^5 - k^5\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right] = 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\sum_{k=0}^{n} k^3 + 10\sum_{k=0}^{n} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \qquad (\clubsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\sum_{k=0}^{n} k^3 + 10\sum_{k=0}^{n} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^5$$

soit encore :

$$5\sum_{k=0}^{n} k^4 = (n+1)^5 - 10\sum_{k=0}^{n} k^3 - 10\sum_{k=0}^{n} k^2 - 5\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1$$

Par conséquent :

$$5\sum_{k=0}^{n} k^4 = (n+1)^5 - \frac{5n^2(n+1)^2}{2} - \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{5n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$\iff 5\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n+1}{6}\left[6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right]$$

$$\iff 5\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n+1}{6}\left[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\right]$$

$$\iff 5\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n+1}{6}\left[6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\right]$$

$$\iff \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)}{30}\left[6n^3 + 9n^2 + n - 1\right] \qquad (\heartsuit)}$$

Par ailleurs, on a pour tout entier naturel n : $(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right) = 6n^3+9n^2+n-1$.

D'où : $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} = \dfrac{n(n+1)}{30}\left[6n^3+9n^2+n-1\right] \qquad (\diamondsuit)}$

On déduit de $(\heartsuit)$ et de $(\diamondsuit)$ que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}}$

Exercice 4 — **(Logique).** On note C l'ensemble des étudiants de MPSI du lycée Jean Bart, F l'ensemble des filles de C et G l'ensemble des garçons de C.

1/ «l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque» : $\boxed{\exists\, x \in C,\ \exists\, y \in C \backslash \{x\},\ (x \heartsuit y) \wedge (y \not\heartsuit x)}$.

2/ «chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas» :

$$\boxed{\underbrace{\forall\, x \in G,\ \forall\, y \in G,\ \forall\, z \in F}_{\text{ou : } \forall\,(x,y,z)\in G\times G\times F},\ [(x \heartsuit z) \wedge (y \heartsuit z)] \Longrightarrow [(x \not\heartsuit y) \wedge (y \not\heartsuit x)]}.$$

3/ «les amis de mes amis sont mes amis» : $\boxed{\forall\ (x,y,z) \in C^3,\ [(x \heartsuit y) \wedge (y \heartsuit z)] \Longrightarrow (x \heartsuit z)}$.

4/ «le plus âgé des élèves est un garçon et il aime toutes les filles» : $\boxed{\exists\, x \in G,\ (\forall\, y \in C \backslash \{x\},\ y \leqslant x) \wedge (\forall\, y \in F, x \heartsuit y)}$.

5/ «personne n'aime personne» : $\boxed{\forall\, x \in C,\ \exists\, y \in C,\ x \heartsuit y}$. ‡

6/ «les personnes qui ont trop d'amour propre ne sont pas aimées des autres» :

$$\boxed{\forall\, x \in C,\ (x \heartsuit x) \Longrightarrow (\forall\, y \in C \backslash \{x\},\ y \not\heartsuit x)}.$$

Exercice 5 — **(Factorielles).** Soit (u_n) la suite réelle définie en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ est vraie pour tout entier naturel p.

<u>Initialisation</u> : pour $p = 0$, on a d'une part $u_0 = 1$ et d'autre part $\dfrac{(0)!}{2^0 (0!)^2} = 1$. La propriété est initialisée.

<u>Hérédité</u> : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p, et montrons que $P(p+1)$ l'est.

On a : $u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2} u_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \dfrac{2p+2}{2p+2} \dfrac{2p+1}{2p+2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}$

Exercice 7 :

1.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}|z^3-z+2|^2 &= \left(z^3-z+2\right)\overline{(z^3-z+2)}\\ &= |z|^6+|z|^2+4-2(z+\overline{z})-|z|^2(z^2+\overline{z}^2)+2(z^3+\overline{z}^3)\\ &= 6-2(z+\overline{z})-(z^2+\overline{z}^2)+2(z^3+\overline{z}^3)\text{car } |z|=1\\ &= 6-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})+2(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}) \qquad \text{car } z=e^{i\theta}\\ &= 6-4\cos\theta-2\cos(2\theta)+4\cos(3\theta) \qquad \text{en vertu d'une relation d'Euler}\\ &= 6-4\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)+4(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\ &= 8-16\cos\theta-4\cos^2\theta+16\cos^3\theta\\ &= 4f(\cos\theta)\end{aligned}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2-2x-4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Puisque $\mathbb{U}=\{e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z)=\max_{\theta\in\mathbb{R}}2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos=[-1,1]$,

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z)=\max_{x\in[-1,1]}2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1,1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z)=2\sqrt{\frac{13}{4}}=\sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont un argument θ est tel que $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2.

Exercice 8 :

1. On applique la méthode de l'arc moitié.

$$\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} && \text{d'après les relations d'Euler} \\
&= i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

2. On remarque que 1 n'est pas solution donc on suppose $z \neq -1$.

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ \frac{z-1}{z+1} = \omega \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ (z-1) = \omega(z+1) \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z(1-\omega) = 1+\omega \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} && \text{car on ne peut avoir } \omega = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ i\,\text{cotan}\,\frac{\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{2\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{3\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{4\pi}{5} \right\}$$

On peut également résoudre l'équation en développant

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5=(z+1)^5 \\
\iff\quad & z^5-5z^4+10z^3-10z^2+5z+1=z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1 \\
\iff\quad & 5z^4+10z^2+1=0
\end{aligned}$$

En posant $Z=z^2$, cette dernière équation équivaut à $5Z^2+10Z+1$ dont les solutions sont $\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ et $-\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$. Le solutions de l'équation initiale sont donc les racines carrées *complexes* de ces deux réels négatifs. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},-i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},-i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right\}$$

La fonction cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ puisque sa dérivée est $-\frac{1}{\sin^2}$. On a donc

$$\cot\frac{\pi}{5}>\cot\frac{2\pi}{5}>\cot\frac{3\pi}{5}>\cot\frac{4\pi}{5}$$

Par ailleurs, puisque $\frac{5-2\sqrt{5}}{5}<\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$, on a par stricte croissance de la racine carrée :

$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}<-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}<\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}<\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\cot\frac{\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \\
\cot\frac{2\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \\
\cot\frac{3\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \\
\cot\frac{4\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

1. **a.** Tout d'abord

$$\sin\frac{18\pi}{11}=\sin\left(\pi+\frac{7\pi}{11}\right)=-\sin\frac{7\pi}{11}$$

De plus, les réels $\frac{6\pi}{11}$ et $\frac{7\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Or la fonction sin est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc $\sin\frac{6\pi}{11}>\frac{7\pi}{11}$ et donc $\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}>0$.

Remarque. Si l'on connaît les formules de factorisation, on peut également écrire

$$\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}=2\sin\frac{12\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}$$

Or $\frac{12\pi}{11}\in[\pi,2\pi]$ donc $\sin\frac{12\pi}{11}<0$ et $\frac{6\pi}{11}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{6\pi}{11}<0$. ■
Remarquons enfin que :

$$\operatorname{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}$$

Or les réels $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{8\pi}{11}$ et $\sin\frac{10\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $[0,\pi]$ donc leurs sinus sont positifs. Ainsi $\operatorname{Im}(S)>0$.

b. Remarquons que $\omega^{11}=1$. On fait alors apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

$$S+T=\left(\sum_{k=0}^{10}\omega^k\right)-1=\frac{1-\omega^{11}}{1-\omega}-1=-1$$

En développant brutalement :

$$ST=\omega^3+\omega^5+\omega^6+2\omega^7+\omega^8+2\omega^9+2\omega^{10}+5\omega^{11}+2\omega^{12}+2\omega^{13}+\omega^{14}+2\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^{17}+\omega^{19}$$

Or $\omega^{11}=1$ donc on peut ramener les puissance de ω dans cette somme entre 0 et 10 :

$$\begin{aligned}ST&=5+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6+2\omega^7+2\omega^8+2\omega^9+2\omega^{10}\\&=3+2\sum_{k=0}^{10}\omega^k=3\end{aligned}$$

c. C'est du cours : S et T sont solutions de l'équation $x^2+x+3=0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Comme $\text{Im}(S)>0$,

$$S=\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\qquad\qquad T=\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$$

2. **a.** Puisque $\frac{20\pi}{11}=2\pi-\frac{2\pi}{11}$,

$$\omega-\omega^{10}=e^{\frac{2i\pi}{11}}-e^{\frac{20i\pi}{11}}=e^{\frac{2i\pi}{11}}-e^{-\frac{2\pi}{11}}=2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

en utilisant une relation d'Euler.

b. On utilise la méthode de l'arc-moitié :

$$\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{1-e^{\frac{6i\pi}{11}}}{1+e^{\frac{6i\pi}{11}}}=\frac{e^{-\frac{3i\pi}{11}}-e^{\frac{3i\pi}{11}}}{e^{-\frac{3i\pi}{11}}+e^{\frac{3i\pi}{11}}}=\frac{-2i\sin\frac{3\pi}{11}}{2\cos\frac{3\pi}{11}}=-i\tan\frac{3\pi}{11}$$

c. La somme à calculer est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-\omega^3\frac{1-\left(-\omega^3\right)^{10}}{1+\omega^3}=-\omega^3\frac{1-\omega^{30}}{1+\omega^3}=\frac{\omega^{33}-\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$$

d. En ramenant à nouveau les puissances entre 0 et 10

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k&=-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega^{12}-\omega^{15}+\omega^{18}-\omega^{21}+\omega^{24}-\omega^{27}+\omega^{30}\\&=-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8\end{aligned}$$

Ainsi

$$T-S=\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k+2(\omega^{10}-\omega)$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-i\tan\frac{3\pi}{11}\qquad\qquad \omega-\omega^{10}=2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

donc

$$T-S=-i\tan\frac{3\pi}{11}-4i\sin\frac{2\pi}{11}$$

puis

$$i(T-S)=\tan\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}$$

Enfin $S=\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $T=\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$ donc $i(T-S)=\sqrt{11}$.

Exercice 8 :

Bonus 1:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{0\leqslant k,n\leqslant N}\frac{(-1)^k}{k^2}\mathbb{1}_{(0\leqslant n<k\leqslant N)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k k}{k^2}.$$

Bonus 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j+1}S_j(n) &= \sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}\sum_{k=0}^{n}k^j \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}k^j \qquad \text{par interversion de l'ordre de sommation} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}k^j\right)-k^{p+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1}-k^{p+1} = (n+1)^{p+1} \qquad \text{via la formule du binôme}
\end{aligned}$$