Simulation DS N°2

Nombres Complexes
Fonctions Usuelles

Vendredi 25 Octobre
Durée : 1 heure 30 mn

Partie I : Nombres Complexes

Exercice 1.

1. On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

   a. Déterminer les antécédents de i par φ.

   b. L'application φ est-elle injective ? Justifier.

   c. Montrer que φ est surjective.

   d. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos\theta$ par φ. On précisera le nombre de ces antécédents suivant les valeurs de θ.

2. On considère un entier $n \geqslant 2$ ainsi que l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right.$$

   a. Déterminer les antécédents de $2\sqrt{12} - 4i$ par ψ lorsque $n = 3$.

   b. On revient au cas général ($n \geqslant 2$). L'application ψ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

   c. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ.

3. On pose $\xi = \varphi \circ \psi$.

   a. L'application ξ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

   b. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par ξ. On en précisera le nombre suivant les valeurs de θ.

4. On considère l'application

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$$

   a. L'application α est-elle injective ? surjective ? Justifier.

   b. Déterminer les antécédents de i par $\beta = \varphi \circ \alpha$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

1. Ecrire $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Justifier que $S_n + iT_n = (1+i)^{2n}$.
3. En déduire des expressions des sommes S_n et T_n faisant intervenir les fonctions cos et sin.

Exercice 3.

1. On considère l'équation $(E) :\ (1+iz)^5 = (1-iz)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - **a.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Montrer que $\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i\tan\theta$.
   - **b.** Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.
   - **c.** Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.
   - **d.** Déterminer le sens de variation de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.
2. On se donne maintenant $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(E_\alpha) :\ (1+iz)^5(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^5(1+i\tan\alpha)$$

   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - **a.** Montrer que $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.
   - **b.** Résoudre l'équation $Z^5 = e^{2i\alpha}$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   - **c.** En déduire les solutions de (E_α) que l'on exprimera à l'aide de la fonction tan.

Exercice 4. Bonus

1. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   - **a.** Que vaut j^3 ?
   - **b.** Calculer $1 + j + j^2$.
   - **c.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

   - **d.** Ecrire $-j$ et $-j^2$ sous forme exponentielle.
2. On considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectifs a, b et c dans un repère orthonormé. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
   - **a.** Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = -j^2$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -j$.
   - **b.** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Partie II : Fonctions Usuelles

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\arcsin(\sin \frac{27\pi}{5})$, $\arctan(\tan \frac{27\pi}{5})$, $\arccos(\cos \frac{27\pi}{5})$.
2. Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{th}(\sin(x^2))$ (ne pas chercher à simplifier la dérivée trouvée).
3. Calculer la limite en 0 de $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sin(x)}$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de $\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$.

Exercice 2 (Une équation trigonométrique) Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$(E): \quad \arctan x + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + \arctan(x^3)$.

1. Démontrer la formule d'addition de la tangente : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$ en précisant pour quelles valeurs de de a et b cette formule a un sens.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.
3. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
4. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α qui est comprise entre 1 et π.
5. Démontrer que pour tout réel $x \notin \{-1,1\}$, on a $\dfrac{x+x^3}{1-x^4} = \dfrac{x}{1-x^2}$, puis résoudre l'équation
$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = -1.$$
6. En déduire la valeur exacte de α.
7. On note f^{-1} l'application réciproque de f. Sans déterminer f^{-1}, justifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer le nombre dérivé $(f^{-1})'(\frac{\pi}{2})$.

FIN

Partie I (Corrigé)

Solution 1.

1. **a.** Il s'agit de résoudre l'équation $z+\frac{1}{z}=i$. Cette équation équivaut à $z^2-iz+1=0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $-5=(i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{i}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})$$

b. Comme i possède deux antécédents par φ, φ n'est pas injective.

c. Soit $Z\in\mathbb{C}$. On considère l'équation $f(z)=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2-Zz+1=0$. Cette équation du second degré admet au moins une solution. Une solution de cette équation ne peut être nulle puisque $0^2-Z\times 0-1=-1\neq 0$. Ainsi l'équation $f(z)=Z$ possède donc une solution dans $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire que Z possède un antécédent par φ. L'application φ est donc surjective.

d. Les antécédents de $2\cos\theta$ par φ sont les solutions de l'équation $\varphi(z)=2\cos\theta$ qui équivaut à $z^2-2z\cos\theta+1=0$. Puisque $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$, les solutions de cette équation sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
Il n'y a en fait qu'une solution lorsque le discriminant $4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta$ est nul et deux sinon. Or le discriminant n'est nul que si $\theta\equiv 0[\pi]$.
Finalement, $2\cos\theta$ possède deux antécédents lorsque $\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et un unique antécédent lorsque $\theta\equiv 0[\pi]$. On peut même préciser que, lorsque $\theta\equiv 0[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=1$ et que, lorsque $\theta\equiv\pi[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=-1$.

2. **a.** Les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ lorsque $n=3$ sont ses racines cubiques. Or $2\sqrt{12}-4i=8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ donc les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ sont $2e^{-\frac{i\pi}{18}}$, $2e^{\frac{11i\pi}{18}}$ et $2e^{\frac{23i\pi}{18}}$.

b. De manière générale, tout complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ donc n antécédents par ψ. L'application ψ est donc surjective. Mais, puisque $n\geqslant 2$, ψ n'est pas injective.

c. Les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$, c'est-à-dire $e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

3. **a.** On sait que ψ et φ sont surjectives donc $\xi=\varphi\circ\psi$ l'est également. Par contre, $\xi=\varphi\circ\psi$ ne peut-être injective car ψ le serait alors également, ce qui n'est pas.

b. D'après la question **1.d**, les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par φ sont $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ (éventuellement confondus lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$).
D'après la question **2.c**, les antécédents de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ possèdent en tout $2n$ antécédents mais, lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont confondus donc leurs antécédents égalements.
Finalement $2\cos(n\theta)$ possède $2n$ antécédents par ξ lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $2\cos(n\theta)$ ne possède que n antécédents. On peut préciser que, lorsque $n\theta\equiv 0[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=1$, qui équivaut à $(z^n-1)^2=0$. De même, lorsque $n\theta\equiv\pi[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de -1. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=-1$, qui équivaut à $(z^n+1)^2=0$.

4. **a.** Puisque $\alpha(0)=\alpha(2i\pi)=1$, α n'est pas injective. Soit $Z\in\mathbb{C}^*$. Notons θ un argument de Z. Alors $|Z|>0$ don on peut définir $\ln(|Z|)+i\theta$ qui est un antécédent de Z par α. Ainsi α est surjective.

b. Les antécédents de i par φ sont $\frac{i}{2}(1+\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{i}{2}(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Les antécédents de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$ par α sont respectivement les complexes

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{pour} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Ce sont donc également les antécédents de i par $\beta=\varphi\circ\alpha$.

SOLUTION 2.

1. On a évidemment $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.
2. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2k}i^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}i^{2k+1} && \text{en séparant les termes d'indices pairs et impairs}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k i && \text{car } i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k\\
&= S_n+iT_n
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord,

$$(1+i)^{2n}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2n}=2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$$

De plus, $(1+i)^{2n}=S_n+iT_n$ et S_n et T_n sont *réels* (et même entiers) donc ce sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n=2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n=2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

SOLUTION 3.

1. **a.** On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}=\frac{2ie^{i\theta}\sin\theta}{2e^{i\theta}\cos\theta}=i\tan\theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z\neq -i$, $1-iz\neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5=(1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5=1\\
&\iff \frac{1+iz}{1-iz}\in\mathbb{U}_5\\
&\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ \frac{1+iz}{1-iz}=e^{\frac{2ik\pi}{5}}\\
&\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ 1+iz=e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz)\\
&\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1)} && \text{car } \forall k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ e^{\frac{2ik\pi}{5}}\neq -1\\
&\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ z=\tan\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question } \textbf{1.a}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{5}$, 0, $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$(1+iz)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}iz+\binom{5}{2}(iz)^2+\binom{5}{3}(iz)^3+\binom{5}{4}(iz)^4+\binom{5}{5}(iz)^5=1+5iz-10z^2-10iz^3+5z^4+iz^5$$

On en déduit que

$$(1-iz)^5=1-5iz-10z^2+10iz^3+5z^4-iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5=(1-iz)^5 &\iff 10iz-20iz^3+2iz^5=0\\
&\iff z(5-10z^2+z^4)=0\\
&\iff z=0 \text{ ou } z^4-10z^2+5=0\\
&\iff z=0 \text{ ou } z^2=5+2\sqrt{5} \text{ ou } z^2=5-2\sqrt{5}\\
&\iff z=0 \text{ ou } z=\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z=-\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z=\sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } z=-\sqrt{5-2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

d. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction tan est-elle croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. **a.**

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\begin{aligned} & \frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k} \\ \iff \quad & z = \frac{e^{2i\alpha_k}-1}{i(e^{2i\alpha_k}+1)} \\ \iff \quad & z = \tan\alpha_k \qquad \text{d'après la question } \mathbf{1.a} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan\alpha_k$ pour $k \in \{-2,0,1,2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

Solution 4.

1. **a.** On a évidemment $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

b. On reconnaît la somme de trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$. Ainsi

$$1 + j + j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$$

puisque $j^3 = 1$.

c. En développant,

$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2 + b^2j^3 + c^2j^3 + ab(j+j^2) + bc(j+j^2) + ca(j+j^2)$$

Or $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$ donc

$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

d.

$$\begin{aligned} -j &= -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \\ -j^2 &= -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

2. **a.** D'après la question **1.c**, $(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = 0$. Ainsi $a+bj+cj^2 = 0$ ou $a+bj^2+cj = 0$.

► Si $a + bj + cj^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} && \text{car } -a = bj + cj^2 \\ &= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\ &= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} && \text{car } 1+j+j^2 = 0 \\ &= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\ &= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3 = 1 \end{aligned}$$

▶ Si $a + bj^2 + cj = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} \qquad \text{car } -a = bj + cj^2 \\
&= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\
&= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} \qquad \text{car } 1+j+j^2 = 0 \\
&= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\
&= -\frac{1}{j} = -j^2 \qquad \text{car } j^3 = 1
\end{aligned}$$

b. D'après la question **1.d**, $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \qquad \text{ou enfin} \qquad |b-a| = |c-a|$$

et

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Ces deux conditions s'écrivent également $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

Partie I (Corrigé)

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. On trouve $\boxed{\arcsin(\sin\frac{27\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5},\ \arctan(\tan\frac{27\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5},\ \arccos(\cos\frac{27\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}}$.

2. Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \text{th}(\sin(x^2))$ (ne pas chercher à simplifier la dérivée trouvée).

   On dérive une composée de trois fonctions :

$$\boxed{f'(x) = \left(1 - \text{th}^2(\sin(x^2))\right) \times \cos(x^2) \times 2x}.$$

3. Pour x au voisinage de 0, par produit et quotients d'équivalents, on a :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sin(x)} \sim \frac{\frac{-x^2}{2}}{x \times x} = \boxed{\frac{-1}{2}}.$$

4. Pour x au voisinage de $+\infty$, $\frac{-3}{x}$ est au voisinage de 0. On a $(1-\frac{3}{x})^x = \exp(x\ln(1-\frac{3}{x}))$. Comme

$$x\ln(1-\frac{3}{x}) \sim x \times \frac{-3}{x} = -3,$$

   on en déduit que $(1-\frac{3}{x})^x$ tend vers $\boxed{e^{-3}}$.

Exercice 2 (Une équation trigonométrique) Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$(E): \quad \arctan x + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + \arctan(x^3)$.

1. Soit a et $b \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$ tels que $a+b \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
$$\begin{aligned} \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b(1 - \tan a \tan b)} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3x^2}{1+(x^3)^2} = \boxed{\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3x^2}{1+x^6}}$.

3. On en déduit que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est de plus continue. D'après le théorème de la bijection, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R}) =]-\pi, \pi[$ ($\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim_{+\infty} f = \pi$, puis f est impaire).

4. Comme $\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi, \pi[$ et que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi, \pi[$, on en déduit que $\dfrac{3\pi}{4}$ admet un unique antédédent par f que l'on note α. On a $f(1) = \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} = f(\alpha)$, donc nécessairement $1 < \alpha$ et donc $\alpha \in]1, \pi[$.

5. Pour $x \notin \{-1, 1\}$, on a $\dfrac{x+x^3}{1-x^4} = \dfrac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \dfrac{x}{1-x^2}$. Ainsi ,
$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = -1 \Leftrightarrow x = -(1-x^2) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

6. On a $f(\alpha) = \frac{3\pi}{4}$ d'où $\tan\big(\arctan \alpha + \arctan(\alpha^3)\big) = \tan \frac{3\pi}{4}$, ce qui donne à l'aide de la formule d'addition de la tangente :
$$\frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha^4} = -1.$$
Mais alors d'après la question précédente, $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mais comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\alpha > 0$, on a $\boxed{\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (c'est le nombre d'or).

7. Puisque f est bijective, elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\pi, \pi[$. Comme $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on a $f(1) = \frac{\pi}{2}$ et donc $f^{-1}(\frac{\pi}{2}) = 1$. La fonction f est dérivable en 1 avec $f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \neq 0$. Le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques nous assure donc que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $\boxed{(f^{-1})'(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2}}$.

Fin