Préparation DS N°2

Nombres Complexes Fonctions Usuelles Équations Différentielles

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquations $\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x)$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (5-2i)z + 6 - 4i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+5z+6)^2 + (2z+4)^2 = 0$.
3. En déduire quatre nombres réels a, b, c et d tels que :

$$(z^2+5z+6)^2 + (2z+4)^2 = (z^2+az+b)(z^2+cz+d).$$

Exercice 3

Chercher une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2t} + \cos(3t)e^t.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)y''(t) - 2y'(t) + (1-t)y(t) = (1+t)^3 e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation homogène associée à (1).
2. Soit y une solution de (1). On pose $z(t) = y(t)e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (1) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle à résoudre.
3. Donner les solutions de (1).

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une partie I incluse dans $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Indication : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$P_\theta = \left\{ j \in [\![1,n]\!] : \theta - \frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z_j) \leqslant \theta + \frac{\pi}{2} \right\} \quad \textit{et} \quad f(\theta) = \left| \sum_{k \in P_\theta} z_k \right|.$$

On cherchera alors à minorer f, puis on intégrera l'inégalité obtenu sur $[0, 2\pi]$.

Correction du DM 4

Exercice 1

L'inéquation est bien définie si, et seulement si, $1 + 2\cos(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x)$. Donc, l'inéquation est bien défini si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k]$. De plus, $\sin(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [2\pi k, \pi + 2\pi k]$. Il vient :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \\
\Leftrightarrow\quad & 1+2\cos(x) \leqslant \sin^2(x) \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \quad (\text{car } \sin x \geqslant 0) \\
\Leftrightarrow\quad & 1+2\cos(x) \leqslant 1-\cos^2(x) \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(x)(2+\cos(x)) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \quad (\text{car } 2+\cos(x) > 0) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k]
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (5-2i)^2 - 4(6-4i) = -3-4i$. De plus, $\omega^2 = -3-4i$, avec $\omega = x+iy$, équivaut à (extraction des racines carrés) :

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{-3+5}{2}} = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3+5}{2}} = \pm 2 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

En obtient $\Delta = (1-2i)^2$ (on peut aussi remarquer que $-3-4i = 1-4i-4 = (1-2i)^2$). Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-5+2i+(1-2i)}{2} = -2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-5+2i-(1-2i)}{2} = -3+2i.$$

2. En utilisant l'identité $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$, il vient :

$$\begin{aligned}
& (z^2+5z+6)^2+(2z+4)^2=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (z^2+5z+6+2iz+4i)(z^2+5z+6-2iz-4i)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (z^2+(5+2i)z+6+4i)(z^2+(5-2i)z+6-4i)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & z^2+(5+2i)z+6+4i=0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{z^2+(5+2i)z+6+4i}=0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{z}^2+(5-2i)\overline{z}+6-4i=0 \quad \text{ou} \quad z^2+(5-2i)z+6-4i=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{z}=-2 \quad \text{ou} \quad \overline{z}-3+2i \quad \text{ou} \quad z=-2 \quad \text{ou} \quad z=-3+2i \\
\Leftrightarrow\quad & z=-2 \quad \text{ou} \quad z=-3-2i \quad \text{ou} \quad z=-3+2i
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a la factorisation suivante (attention -2 est racine double) :

$$(z^2+5z+6)^2+(2z+4)^2=(z+2)^2(z+3-2i)(z+3+2i)=(z^2+4z+4)(z^2+6z+13).$$

Exercice 3

L'équation caractéristique associée est $x^2+4x+4=(x+2)^2=0$, dont -2 est l'unique solution (c'est une racine double du polynôme X^2+4X+4). Ainsi, il faut chercher une solution particulière de la forme $\varphi(t)=(\alpha t^2+\beta t+\gamma)e^{-2t}+(a\cos(3t)+b\sin(3t))e^t$. Comme les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{-2t}$, on peut prendre $\beta=\gamma=0$.

On cherche alors une solution de la forme $\varphi(t)=\alpha t^2e^{-2t}+(a\cos(3t)+b\sin(3t))e^t$. On trouve $\varphi'(t)=2\alpha(t-t^2)e^{-2t}+\big((b-3a)\sin(3t)+(3b+a)\cos(3t)\big)e^t$, puis $\varphi''(t)=2\alpha(1-4t+2t^2)e^{-2t}+\big((6b-8a)\cos(3t)-(8b+6a)\sin(3t)\big)e^t$. En remplaçant dans l'équation, il vient :

$$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=2e^t+\cos(3t)e^t \quad\Leftrightarrow\quad 2\alpha e^{-2t}+(18b\cos(3t)-18a\sin(3t))e^t.$$

Par identification, on obtient $\alpha=1$, $a=0$ et $b=\dfrac{1}{18}$. Ainsi, $t\mapsto t^2e^{-2t}+\dfrac{1}{18}\sin(3t)e^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

Exercice 4

1. On a $(1+t)e^t-2e^t+(1-t)e^t=0$, donc $t\mapsto e^t$ est solution de l'équation homogène associée.
2. En posant, $z(t)=y(t)e^{-t}$, on a $y(t)=z(t)e^t$, puis $y'(t)=(z'(t)+z(t))e^t$ et $y''(t)=(z''+2z'(t)+z(t))e^t$. On trouve alors $(1+t)y''-2y'+(1-t)y=\big((1+t)z''+2tz'\big)e^t$. Par conséquent, y est solution de (1) si, et seulement si, $(1+t)z''+2tz'=(1+t)^3$. En d'autres termes, z' est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)f'+2tf=(1+t)^3. \tag{2}$$

De plus, les solutions de (2) sont de la forme :

$$f(t)=\begin{cases}\lambda(1+t)^2e^{-2t}+\dfrac{(1+t)^2}{2}, & \text{si } t\in]-\infty,-1] \\ \mu(1+t)^2e^{-2t}+\dfrac{(1+t)^2}{2}, & \text{sinon}\end{cases}\quad,\quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Le calcul d'une primitive donne alors :

$$z(t)=\begin{cases}\lambda(t^2+3t+5/2)^2e^{-2t}+\dfrac{(1+t)^3}{6}, & \text{si } t\in]-\infty,-1] \\ \mu(t^2+3t+5/2)^2e^{-2t}+\dfrac{(1+t)^3}{6}, & \text{sinon}\end{cases}\quad,\quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

3. D'après la question 2, les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation (1) sont données par :

$$y(t)=\begin{cases}\lambda(t^2+3t+5/2)^2e^{-t}+\dfrac{(1+t)^3}{6}e^{t}, & \text{si } t\in]-\infty,-1] \\ \mu(t^2+3t+5/2)^2e^{-t}+\dfrac{(1+t)^3}{6}e^{t}, & \text{sinon}\end{cases}\quad,\quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 5

On note $z_k=|z_k|e^{i\theta_k}$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$. On commence faire « tourner » les éléments de P_θ de façon à ce qu'ils soient dans le demi-plan $x\geqslant 0$, puis on minore la fonction f à l'aide de l'inégalité $|Z|\geqslant|\operatorname{Re}(Z)|$. On trouve :

$$f(\theta)=\left|\sum_{k\in P_\theta} z_k e^{-i\theta}\right|\geqslant\sum_{k\in P_\theta}|z_k|\cos(\theta_k-\theta).$$

On remarque qu'il n'y a pas besoin de valeur absolue sur le cosinus puisque $\theta_k-\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$. On a alors :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant\int_0^{2\pi}\sum_{k\in P_\theta}|z_k|\cos(\theta_k-\theta)\mathrm{d}\theta.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in P_\theta}|z_k|\cos(\theta_k-\theta)\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=1}^{n}|z_k|\int_0^{2\pi}\cos(\theta_k-\theta)\mathbf{1}_{P_\theta}(\theta_k)\mathrm{d}\theta\\ &=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\int_{\theta_k-\frac{\pi}{2}}^{\theta_k+\frac{\pi}{2}}\cos(\theta_k-\theta)\mathrm{d}\theta\\ &=2\sum_{k=1}^{n}|z_k|,\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{P_\theta}$ est la fonction indicatrice de P_θ (il faut préciser le raisonnement pour la seconde égalité). De plus, f est continue sur $[0, 2\pi]$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta$ est la valeur moyenne de f sur $[0, 2\pi]$. Donc, il existe θ_0 dans $[0, 2\pi]$ tel que $2\pi f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta$. Ainsi, il vient :

$$2\pi f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant \int_0^{2\pi} \sum_{k\in P_\theta} |z_k| \cos(\theta_k - \theta)\mathrm{d}\theta = 2\sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Ainsi, on pose $I = P_{\theta_0}$ et on a $\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.