Devoir Surveillé N°2

Corrigé

Partie I: Nombres Complexes

Problème A :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \longmapsto z(1-z)$.

1. On résoud donc $z(1-z) = z \Leftrightarrow z^2 = 0$ donc $\boxed{S = \{0\}}$.

2. $\sin(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ lorsque il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\theta}{2} \in [0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$. Donc $\boxed{S = [4k\pi; 2\pi + 4k\pi] \text{ pour } k \in \mathbb{Z}}$.
(on peut écrire $S = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [4k\pi; 2\pi + 4k\pi]$ ou $S = [0; 2\pi][4\pi]$.)

3. $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = e^{i\theta} - e^{i2\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{3\theta}{2}}$. On a donc $|f(e^{i\theta})| = 2|\sin(\frac{\theta}{2})|$.
Si $\sin(\frac{\theta}{2}) \geq 0$, c'est à dire $\theta \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [4k\pi; 2\pi + 4k\pi]$, on a $\arg(f(e^{i\theta})) = \arg(-ie^{i\frac{3\theta}{2}}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2} = \frac{3\theta - \pi}{2}[2\pi]$
sinon $\arg(f(e^{i\theta})) = \arg(ie^{i\frac{3\theta}{2}}) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2} = \frac{3\theta + \pi}{2}[2\pi]$

4. L'implication ($z \in \mathbb{U} \Rightarrow f(z) \in \mathbb{U}$) est fausse puisque $f(1) = 0 \notin \mathbb{U}$.

5. Supposons que $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ et montrons que $|f(z) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. En utilisant l'indication :
$|f(z) - \frac{1}{2}| = |(z - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - z) - \frac{1}{4}| \leq |z - \frac{1}{2}||\frac{1}{2} - z| + \frac{1}{4} = |z - \frac{1}{2}|^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Problème B :

1. h est définie pour $\sin(x) \neq 0$ donc sur $\mathbb{R} \setminus \{0[\pi]\}$.
2. On a $h(-x) = h(x)$ donc h est paire.
3. $h(x + \pi) = \frac{\sin(3x+3\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\sin(3x)}{-\sin(x)} = h(x)$. h est donc π-périodique.
4. Comme h est paire et π-périodique, il suffit de l'étudier sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.
5. $(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))$ par la formule du binôme.

6. D'après la question précédente, $Im((\cos(x)+i\sin(x))^3) = (3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))$ et par la formule de Moivre, $Im((\cos(x)+i\sin(x))^3) = \sin(3x)$.
7. D'après la question précédente, $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$ donc $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 3\cos^2(x) - \sin^2(x) = 4\cos^2(x) - 1$. On peut donc poser $g(x) = 4\cos^2(x) - 1$.
8. L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

<u>Problème C :</u>

1. $(z+h)^3+3(z+h)^2+(3-6i)(z+h)+2i = z^3+3z^2h+3zh^2+h^3+3z^2+6zh+3h^2+(3-6i)z+(3-6i)h+2i$, il faut donc prendre $h=-1$ et on obtient l'équation $z^3-6iz-1+8i=0$.

2.(a) $(u+v)^3-6i(u+v)-1+8i = U+V+3u(2i)+3v(2i)-6iu-6iv-1+8i = 0$.

(b) On a $UV=(uv)^3=(2i)^3=-8i$ donc d'après les relations coefficients racines, U et V sont les racines de $Z^2-(1-8i)Z-8i=0$.

(c) Remarquons que les racines sont évidentes : 1 et $-8i$ donc $U=1$ et $V=-8i$.

(d) On a $u^3=1$ donc $u=1$ ou $u=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $u=e^{\frac{4i\pi}{3}}$. $v^3=-8i$ donc $v=\sqrt{3}-i$ ou $v=2i$ ou $v=-\sqrt{3}-i$.

(e) On a une solution de la forme $u+v$ et en remplaçant, on remarque que $z_0=1+2i$ est solution de (F).

(f) En développant, on a $(z-1-2i)(z^2+az+b) = z^3+(a-1-2i)z^2+(b-a(1+2i))z-b(1+2i)$ donc par identification, $a=1+2i$ et $b=-3-2i$.

(g) $\Delta=(1+2i)^2+4(3+2i)=9+12i$. On cherche alors
$\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ xy=6 \\ x^2+y^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=12 \\ xy=6 \\ y^2=3 \end{cases}$. Donc $\delta = 2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $z_1 = \frac{-1-2\sqrt{3}}{2}+i\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.

3. Finalement, les solutions de (E) sont celles de (F) moins 1 donc $x_0=2i$, $x_1=\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}+i\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.

Partie II: Equations Différentielles

Exercice 1

1. Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto x\ln x$. On effectue une intégration par parties. On obtient que $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

2. Déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E):\quad xy'(x)+2y(x)=\ln x$$

On a $F(x)=\int^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln x$, donc $\mathrm{e}^{-F(x)}=\mathrm{e}^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$. Cette solution engendre les solutions de l'équation homogène.

On cherche y_p une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x)=\lambda(x)\times\frac{1}{x^2}$. D'après le cours, $\lambda(x)=\int^x t^2\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int^x t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions : $\quad x\mapsto \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}+\frac{A}{x^2},\quad A\in\mathbb{R}.$

Exercice 2 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(E)y''(x)+y'(x)+y(x)=x^2+x+1.$$

1. On commence par déterminer une solution particulière y_p sous forme polynomiale. On remarque que y_p doit être de degré 2, donc de la forme $y_p(x)=ax^2+bx+c$. Ainsi y_p solution de (E) si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2a)+(2ax+b)+(ax^2+bx+c)=x^2+x+1$. Par identification, on obtient $a=1, 2a+b=1$ et $2a+b+c=1$, ce qui donne $b=-1$ et $c=0$. Ainsi $y_p(x)=x^2-x$.

2. Le polynôme caractéristique associée à l'équation honomgène est X^2+X+1 qui admet pour racines complexes j et $\overline{j}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\pm_2 i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+(x^2-x),\quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 (Une équation fonctionnelle) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est solution, la fonction f est dérivable et en partciulier continue, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f, on en déduit que f' est dérivable et que $f'' = f$. Ainsi f est une combinaison linéaire de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$: il existe des réels A et B tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$. De plus, en remplaçant $x = 0$ dans l'équation de départ, on a $f'(0) = 0$. Comme d'autre part, $f'(x) = A\mathrm{e}^x - B\mathrm{e}^{-x}$, on obtient $0 = A - B$, d'où $A = B$. Ainsi $f(x) = A(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 2A\,\mathrm{ch}(x)$.

Réciproquement, on considère f une fonction proportionnelle à ch : $f = a\,\mathrm{ch}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x a\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = a(\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)) = a\,\mathrm{sh}(x) = f'(x).$$

Conclusion : les solutions sont les fonctions proportionnelles à cosinus hyperbolique.

Exercice 3

Cet exercice a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec notamment plusieurs problèmes de recollement.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ainsi pour tout réel $x \notin \{-1, 0, 1\}$, on peut réécrire l'équation de la façon suivante :

$$(\widehat{E}) \ : \ y'(x) + \frac{2}{x(x^2-1)} y(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

On peut alors effectuer la résolution de cette équation différentielle sur les intervalles :

$$\boxed{I_1 =]-\infty, -1[, \ I_2 =]-1, 0[, \ I_3 =]0, 1[\text{ et } I_4 =]1, +\infty[}$$

Toute la difficulté de l'exercice sera, dans un second temps, de recoller les solutions ainsi trouvées.

2. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x-1} &= \frac{\alpha(x+1)(x-1) + \beta x(x-1) + \gamma x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{\alpha x^2 - \alpha + \beta x^2 - \beta x + \gamma x^2 + \gamma x}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\gamma-\beta)x - \alpha}{x(x^2-1)}\end{aligned}$$

Puisque l'on veut que cette fraction soit égale à $\dfrac{2}{x(x^2-1)}$, on obtient, en identifiant, le système :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \gamma-\beta=0 \\ -\alpha=2 \end{cases}$$

On résout sans difficulté ce système pour trouver $\alpha=-2$, $\beta=1$ et $\gamma=1$.
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, on a :

$$\boxed{\frac{2}{x(x^2-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$$

Une telle écriture s'appelle une décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{2}{x(x^2-1)}$. *Nous verrons plus tard dans l'année des méthodes plus efficaces pour effectuer ce type de décomposition.*

3. Notons I l'un des intervalles I_1, I_2, I_3 ou I_4 et effectuons la résolution de l'équation homogène sur I.
   D'après la question précédente, on pose :

$$\begin{array}{rccl} a & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

   La fonction a est continue sur I et une primitive de a sur I est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} A & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -2\ln(|x|) + \ln(|x+1|) + \ln(|x-1|) \end{array}$$

   Ainsi les solutions de l'équation homogène sur l'intervalle I sont les fonctions :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{2\ln(|x|) - \ln(|x+1|) - \ln(|x-1|)}$$

   où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   En simplifiant, on obtient l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda |x|^2}{|x+1||x-1|},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   Quitte à changer λ en $-\lambda$, on peut omettre les valeurs absolues puisque les fonctions mises en jeu ne changent pas de signe sur I, d'où :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda x^2}{x^2-1},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. Il n'y a pas de solution évidente, on va employer la méthode de la variation de la constante. Tous les calculs qui suivent sont valables pour tout $x \in I$. On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0 : x \mapsto \frac{\lambda(x) x^2}{x^2-1}$$

   où λ est une fonction dérivable sur I, ainsi y_0 est également dérivable sur I. On a :

$$y_0' : x \mapsto \frac{(\lambda'(x)x^2 + 2\lambda(x)x)(x^2-1) - 2\lambda(x)x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1) - 2\lambda(x)x}{(x^2-1)^2}$$

On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (\widehat{E}) \text{ sur } I \quad & \Leftrightarrow \quad y_0'(x) + \frac{2}{x(x^2-1)} y_0(x) = \frac{1}{x^2-1} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1) - 2\lambda(x)x}{(x^2-1)^2} + \frac{2}{x(x^2-1)} \frac{\lambda(x)x^2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^2-1} \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda'(x)x^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Choisissons $\lambda : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ de telle sorte que :

$$y_0 : x \mapsto -\frac{x}{x^2-1}$$

En ajoutant les solutions de l'équation homogène, on obtient l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto \frac{\lambda x^2 - x}{x^2-1}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

5. (a) L'objet de cette question est l'étude du recollement au point $x = 0$. On procède comme d'habitude par analyse-synthèse.

▶ **Analyse.** Supposons avoir trouvé une fonction f définie et dérivable sur $]-1,1[$ solution de (E) sur $]-1,1[$. En particulier f est solution de (E) sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ donc s'écrit de la façon suivante :

$$f \; : \;]-1,1[\; \to \; \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

La valeur en 0 se trouvant en évaluant en $x = 0$ l'équation (E), les constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ étant à déterminer afin que f soit dérivable.

- <u>Etude de la continuité :</u>

La fonction f est clairement continue sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, étudions plus spécifiquement la continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\mu x^2 - x}{x^2-1} = 0 = f(0)$$

Ainsi quelques soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la fonction f est continue sur $]-1,1[$.

- <u>Etude de la dérivabilité :</u>

1. L'équation caractéristique s'écrit $X^2+b=0$, il y a trois cas :
▶ Si $b>0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées : $X_1=i\sqrt{b}$ et $X_2=-i\sqrt{b}$, dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(\sqrt{b}x)+B\sin(\sqrt{b}x)\end{array}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

▶ Si $b=0$, l'équation devient $y''=0$ ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ax+B\end{array}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

▶ Si $b<0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $X_1=\sqrt{-b}$ et $X_2=-\sqrt{-b}$ dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{\sqrt{-b}x}+Be^{-\sqrt{-b}x}\end{array}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

2. On reprend les solutions trouvées dans les questions précédentes en cherchant les réels A et B tels que $y(0)=y(1)=0$.
▶ Si $b>0$, une solution de l'équation $y''+by=0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x\mapsto A\cos(\sqrt{b}x)+B\sin(\sqrt{b}x)$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ A\cos(\sqrt{b})+B\sin(\sqrt{b}) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ B\sin(\sqrt{b}) & = & 0\end{array}\right.$$

Dans cette question, on cherche des solutions non nulles à cette équation. Comme on a nécessairement $A=0$, il faut que B soit non nul afin d'avoir une solution non nulle à cette équation et dans ce cas $\sin(\sqrt{b})=0$, on a :

$$\sin(\sqrt{b})=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \sqrt{b}=k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ b=k^2\pi^2$$

Dans ce cas, on a une solution non nulle définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x\mapsto B\sin(k\pi x)$ où $k\in\mathbb{Z}^*$ et $B\in\mathbb{R}^*$.
▶ Si $b=0$ une solution de l'équation $y''+by=0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x\mapsto Ax+B$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & 0 \\ A+B & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ B & = & 0\end{array}\right.$$

Dans ce cas seule la fonction nulle vérifie ces conditions.
▶ Si $b<0$ une solution de l'équation $y''+by=0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x\mapsto Ae^{\sqrt{-b}x}+Be^{-\sqrt{-b}x}$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ Ae^{\sqrt{-b}}+Be^{-\sqrt{-b}} & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & -A \\ Ae^{\sqrt{-b}}-Ae^{-\sqrt{-b}} & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & -A \\ 2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b}) & = & 0\end{array}\right.$$

La fonction sh s'annule uniquement en 0, or dans ce cas $b\neq 0$ ainsi $2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b})=0$ implique que $A=0$ et par suite $B=0$. Toutes les solutions trouvées sont nulles.

En résumé l'ensemble des réels b tels qu'il existe une solution non nulle à l'équation proposée est :

$$\boxed{\{k^2\pi^2,\ k\in\mathbb{Z}^*\}}$$

Ces solutions non nulles sont alors les fonctions :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{llll} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & B\sin(k\pi x)\end{array},\ (k,B)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}^*\right\}}$$

3. Remarquons tout d'abord que la fonction z est dérivable deux fois sur I puisque c'est la somme de y'' qui est dérivable deux fois sur I car y est dérivable quatre fois sur I et de uy qui est dérivable deux fois sur I.
De plus $z''=(y'')''+uy''=y^{(4)}+uy''$. Sur l'intervalle I, on a :

z solution de $z''+vz=0 \Leftrightarrow y$ solution de $y^{(4)}+uy''+v(y''+uy)=0 \Leftrightarrow y$ solution de $y^{(4)}+(u+v)y''+uvy=0$ (★)

Nous devons trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ telle que y soit solution sur I de $y^{(4)}+2ay''+y=0$. Cette équation différentielle a les mêmes solutions que l'équation différentielle (★) si et seulement si les coefficients sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lll} u+v & = & 2a \\ uv & = & 1\end{array}\right. \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ solutions de } X^2-2aX+1=0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=4(a^2-1)$ qui est strictement positif puisque $a>1$. Les deux solutions sont $X_1=a+\sqrt{a^2-1}$ et $X_2=a-\sqrt{a^2-1}$. Les valeurs de u et v recherchées pour que l'équivalence soit vérifiée sont :

$$\boxed{\{u,v\}=\{a+\sqrt{a^2-1},a-\sqrt{a^2-1}\}}$$

Il n'y a pas de moyen de différencier u et v.

4. (a) On utilise les formules trouvées à la question précédente :

$$\begin{aligned} a\pm\sqrt{a^2-1}=k^2\pi^2 \text{ où } k\in\mathbb{Z}^* &\Leftrightarrow a-k^2\pi^2=\pm\sqrt{a^2-1} \text{ où } k\in\mathbb{Z}^* \\ &\Leftrightarrow a^2-2ak^2\pi^2+k^4\pi^4=a^2-1 \text{ où } k\in\mathbb{Z}^* \\ &\Leftrightarrow 2ak^2\pi^2=1+k^4\pi^4 \text{ où } k\in\mathbb{Z}^* \\ &\Leftrightarrow a=\frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2} \text{ où } k\in\mathbb{Z}^*\end{aligned}$$

$$\boxed{u=k^2\pi^2 \text{ ou } v=k^2\pi^2 \text{ avec } k\in\mathbb{Z}^* \text{ si et seulement si } a=\frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}}$$

(b) On suppose que pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, $a\neq\dfrac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$, alors d'après la question précédente, u et v ne sont pas égaux à $k^2\pi^2$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$. On suppose que y est une solution de l'équation (E) et on note toujours z la fonction définie sur I par $z=y''+uy$. On a $z(0)=y''(0)+uy(0)=0$ et $z(1)=y''(1)+uy(1)=0$. Ainsi la fonction z est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} z''+vz=0 \\ z(0)=z(1)=0\end{array}\right.$$

Comme $v \neq k^2\pi^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, d'après la question 2. cela implique que z est la fonction nulle. Or $z = y'' + uy$ donc y vérifie l'équation :

$$\begin{cases} y'' + uy = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Or $u \neq k^2\pi^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, toujours d'après la question 2., cela implique que y est la fonction nulle.

$$\boxed{\text{Si pour tout } k \in \mathbb{Z}^*,\ a \neq \frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2} \text{ alors la seule solution de } (E) \text{ est la fonction nulle.}}$$

(c) D'après la question 4.(a), on sait que $u = k^2\pi^2$ ou $v = k^2\pi^2$, considérons ces deux cas :

▶ Si $v = k^2\pi^2$ alors z est solution de :

$$\begin{cases} z'' + vz = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

D'après l'étude faite à la question 2., cela signifie que la fonction z est définie sur I par $z : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $B \in \mathbb{R}$. Il s'agit à présent de trouver les fonctions y qui vérifient :

$$\begin{cases} y'' + uy = z \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'' + uy = B\sin(k\pi x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'' + \dfrac{1}{k^2\pi^2}y = B\sin(k\pi x) \quad (\bigstar\bigstar) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Ceci puisque d'après la question 3., on a $uv = 1$ ainsi $u = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur I par $y : x \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{x}{k\pi}\right)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il reste à trouver une solution particulière de l'équation $(\bigstar\bigstar)$, on la cherche sous la forme $y_0 : x \mapsto \mu\sin(k\pi x)$ où $\mu \in \mathbb{R}$. La fonction y_0 est dérivable deux fois sur I et $y_0'' : x \mapsto -\mu k^2\pi^2\sin(k\pi x)$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} y_0''(x) + uy_0(x) = B\sin(k\pi x) \quad &\Leftrightarrow \quad -\mu k^2\pi^2\sin(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2}\mu\sin(k\pi x) = B\sin(k\pi x) \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(-\mu k^2\pi^2 + \mu\frac{1}{k^2\pi^2}\Big)\sin(k\pi x) = B\sin(k\pi x) \end{aligned}$$

Or, il existe $x \in [0,1]$ tel que $\sin(k\pi x) \neq 0$, ainsi :

$$\begin{aligned} -\mu k^2\pi^2 + \mu\frac{1}{k^2\pi^2} = B \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\Big(\frac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2\Big) = B \\ &\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{B}{\frac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2} \quad (\Delta) \end{aligned}$$

On a bien $\dfrac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2 = \dfrac{1-k^4\pi^4}{k^2\pi^2} \neq 0$ puisque π ne peut être égal à $\dfrac{1}{k^4}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.
Il reste à interpréter ce que l'on vient d'obtenir, B est un réel arbitraire, ainsi quand B décrit $\mathbb{R}$ la relation (Δ) démontre que μ décrit $\mathbb{R}$.
On fait la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène, les solutions sur I de $(\bigstar\bigstar)$ sont les fonctions : $y : x \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \mu\sin(k\pi x)$.
Un calcul rapide montre que les conditions $y(0) = y(1) = 0$ imposent $\alpha = \beta = 0$.
En résumé s'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a = \dfrac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$, les solutions de l'équation (E) sont :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mu\sin(k\pi x) \end{array}, \ \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

► Si $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ alors z est solution de :

$$\begin{cases} z'' + vz = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

D'après la question 2., z est nécessairement la fonction nulle puisque $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ ne peut s'écrire sous la forme $k'^2\pi^2$ où $k' \in \mathbb{Z}$. En effet si tel était le cas, on aurait $\pi^4 = \dfrac{1}{k^2k'^2}$, ce qui est absurde car π^4 n'est pas rationnel.
Comme z est la fonction nulle, y est solution de :

$$\begin{cases} y'' + uy = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

avec $u = k^2\pi^2$ puisque $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ et $uv = 1$. Toujours d'après la question 2., cela implique que y est la fonction définie sur I par $y : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $B \in \mathbb{R}$.
On trouve le même résultat que dans le cas précédent puisque les fonctions solutions de (E) sont :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & B\sin(k\pi x) \end{array}, \ B \in \mathbb{R} \right\}}$$

Problème : À la découverte de l'arctangente

A-Simplification de Arctan(x) + Arctan(y)

Ce problème se propose de trouver une simplication d'une somme d'arctangentes. L'outil principal est la formule : $\tan(x+y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$*. Les complications proviennent essentiellement des nombreux cas à considérer. Dans un second temps, deux applications des formules trouvées sont proposées. Notamment la formule de Machin, du nom de John Machin un mathématicien anglais du XVIIIième siècle, qui permet de calculer des décimales de* π*.*

1. La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}^*$ puisque la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a d'après la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 0}$$

   Comme la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, cela signifie que f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi, il suffit de prendre deux valeurs particulières pour avoir :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ f(x) = f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = f(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

   On vient de démontrer que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

2. (a) i. Pour $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(a) \neq 0$ et $\tan(a)$ est bien défini. On a :

$$\frac{1}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)$$

$$\boxed{\forall a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)}$$

ii. On va utiliser la relation suivante valable pour tout $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\bigstar)$$

De plus pour tout x réel, on a : $\mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$.
Ainsi en prenant la racine carrée de la relation ($\bigstar$), on obtient :

$$\boxed{\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

iii. On a vu au cours du raisonnement précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$, ainsi on peut écrire :

$$\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{\sin(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos(\mathrm{Arctan}(x))}$$

Etant donné que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$, on a en utilisant la question précédente :

$$\sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \tan(\mathrm{Arctan}(x)) \times \cos(\mathrm{Arctan}(x)) = x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(b) On va utiliser la formule de trigonométrie valable pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

En utilisant la question 2.(a), on a pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) &= \cos(\mathrm{Arctan}(x))\cos(\mathrm{Arctan}(y)) - \sin(\mathrm{Arctan}(x))\sin(\mathrm{Arctan}(y)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \\
&= \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \quad (\bigstar\bigstar)}$$

(c) Etant donné que la fonction arc tangente est à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in]-\pi,\pi[$.
Or d'après l'hypothèse de la question, on a $xy\neq 1$, ainsi le résultat obtenu à la question précédente montre que $\cos(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))\neq 0$. Ceci implique que $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\notin\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
Finalement :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \text{avec } xy\neq 1,\ \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[}$$

(d) Etant donné que $\cos(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))\neq 0$, la quantité $\tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))$ existe. On a alors puisque $xy\neq 1$:

$$\begin{aligned}\tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(x))+\tan(\text{Arctan}(y))}{1-\tan(\text{Arctan}(x))\tan(\text{Arctan}(y))}\\ &= \frac{x+y}{1-xy}\end{aligned}$$

En résumé :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } xy\neq 1,\ \tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))=\frac{x+y}{1-xy}\ (\bigstar\bigstar\bigstar)}$$

(e) On suppose que $xy<1$, d'après la relation $(\bigstar\bigstar)$, on a $\cos(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))>0$. Ainsi, en utilisant la question 2.(b), il apparaît que l'on se trouve dans le cas où $\tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
On rappelle que pour tout $a\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\text{Arctan}(\tan(a))=a$, on prend alors l'arc tangente de la relation $(\bigstar\bigstar\bigstar)$, on a :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } xy<1,\ \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$

(f) On suppose $xy>1$, d'après la relation $(\bigstar\bigstar)$, on a $\cos(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))<0$, ainsi on a :

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x>0$, ce qui implique $\text{Arctan}(x)>0$ et par suite $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)>-\dfrac{\pi}{2}$.
On en déduit que $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.
Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, on a : $a-\pi\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ et dans ce cas :

$$\text{Arctan}(\tan(a))=\text{Arctan}(\tan(a-\pi))=a-\pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation $(\bigstar\bigstar\bigstar)$, ceci donne :

$$\text{Arctan}(\tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)))=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)-\pi=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

C'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } xy>1 \ \text{ et } x>0,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi}$$

(g) On suppose $xy>1$, d'après la relation ($\bigstar\bigstar$), on a $\cos(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y))<0$, ainsi on a :

$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x<0$, ce qui implique $\operatorname{Arctan}(x)<0$ et par suite $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)<\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a\in\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $a+\pi\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dans ce cas :

$$\operatorname{Arctan}(\tan(a))=\operatorname{Arctan}(\tan(a+\pi))=a+\pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation ($\bigstar\bigstar\bigstar$), ceci donne :

$$\operatorname{Arctan}(\tan(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)))=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)+\pi=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

C'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } xy>1 \ \text{ et } x<0,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\pi}$$

3. On a traité tous les cas dans les questions précédentes :
Résumons pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad xy=1 \text{ et } x>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad xy=1 \text{ et } x<0\\[2mm] \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & \text{si} \quad xy<1\\[2mm] \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+\pi & \text{si} \quad xy>1 \text{ et } x>0\\[2mm] \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)-\pi & \text{si} \quad xy>1 \text{ et } x<0\end{cases}}$$

4. (a) On doit simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)$. On applique l'étude précédente à $x=\dfrac{1}{5}$ et $y=\dfrac{1}{5}$. Comme $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{25}<1$, on a, en se référant au résumé de la question précédente :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$$

D'où l'égalité :

$$\boxed{2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)}$$

(b) On a ainsi : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)=2\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$. C'est la même méthode que précédemment puisque $\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}<1$:

$$2\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

On a démontré que :

$$\boxed{4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)}$$

(c) On a $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)+\text{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right)$ d'après la question précédente. On utilise toujours les résultats de la question 3., on a $\frac{120}{119}\times-\frac{1}{239}<1$, ainsi :

$$\text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)+\text{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right)=\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$$

C'est la formule de Machin :

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

Cette formule fut trouvée par John Machin en 1706, il l'utilisa pour calculer 100 *décimales du nombre* π*, ce qui constituait le record à l'époque. Aujourd'hui, on connaît 12000 milliards de décimales de* π*.*

B-Approximation polynomiale de la fonction arc tangente

Cette partie vise à obtenir un polynôme qui est "proche" de la fonction Arctan. En seconde année, vous justifierez l'écriture :

$$\forall x\in[-1,1],\ \text{Arctan}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Ceci va notamment nous permettre d'obtenir un procédé pour calculer des décimales de π*.*

1. Soit $q\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Supposons dans un premier temps $q\neq-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kq^k=\sum_{k=0}^{n}(-q)^k=\frac{1-(-q)^{n+1}}{1-(-q)}=\frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$$

Ceci en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.
Si $q=-1$, on a : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$.
On a démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q=-1 \\ \dfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} & \text{si} \quad q \neq -1 \end{cases}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est dérivable car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)\frac{x^{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}.$$

La dernière égalité s'obtenant grâce à la question précédente appliquée à $q = x^2$.
On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0, \quad S_n'(x) = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}}$$

3. (a) Puisque $S_n(0) = 0$ et $\operatorname{Arctan}(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n(0) = 0}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$R_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ -\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} & \text{si} \quad n \text{ pair} \end{cases}$$

Si n est impair : $\forall x \geq 0,\ R_n'(x) \geq 0$. Si n est pair : $\forall x \geq 0,\ R_n'(x) \leq 0$. Ce qui permet de connaître les variations de R_n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} R_n \text{ est croissante} & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ R_n \text{ est décroissante} & \text{si} \quad n \text{ pair} \end{cases}}$$

(c) ► Soit n un entier naturel impair. On a pour tout $x \geq 0$: $R_n(x) \geq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \geq S_n(x)$.
Dans ce cas $n+1$ est un entier pair, donc $x \geq 0$: $R_{n+1}(x) \leq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)$.
Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair} : \forall x \geq 0,\ S_n(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)}$$

► Soit n un entier naturel pair. On a pour tout $x \geq 0$: $R_n(x) \leq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \leq S_n(x)$.
Dans ce cas $n+1$ est un entier impair, donc $x \geq 0$: $R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \geq S_{n+1}(x)$.
Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair} : \forall x \geq 0,\ S_{n+1}(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq S_n(x)}$$

(d) Remarquons pour commencer que pour tout $x \geq 0$:

$$S_{n+1} - S_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

► Soit n un entier naturel impair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$0 \leq \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) \leq S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \quad (A)$$

► Soit n un entier naturel pair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$-\frac{x^{2n+3}}{2n+3} = S_{n+1}(x) - S_n(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) \leq 0 \quad (B)$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les inégalités (A) et (B) donnent :

$$\forall x \geq 0,\ -\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ \left|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}}$$

4. On utilise l'inégalité précédente avec $x = 1$, sachant que $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$, on a en passant à la limite :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\pi = 4 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

5. D'après l'étude menée à la question précédente, on a :

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$$

On souhaite avoir :

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 4 \times 10^6 \leq 2n+3 \Leftrightarrow \frac{4 \times 10^6 - 3}{2} \leq n$$

Ainsi lorsque $n \geq \frac{4 \times 10^6 - 3}{2}$, on a $\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \leq 10^{-6}$.