Nombres Réels
Suites Numériques

Durée : 4 heures

Documents & Calculatrices Non Autorisés

Exercice 1

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\alpha_{n+2} = \sqrt{\alpha_{n+1}\alpha_n}$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 8$.

1. Démontrer que $\alpha_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$
   Indication : on posera l'hypothèse de récurrence P_n : " $\alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} > 0$ "
2. Vérifier que la suite u définie par $u_n = \ln \alpha_n$ vérifie : $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite u converge puis justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 4$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - u_n$ et $u_0 = \ln 2$.

On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,7$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On admet que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. Démontrer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite u converge et expliciter sa limite.
4. On introduit la suite $w_n = (-1)^{n-1}u_n$.
   (a) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad w_{n+1} = w_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 1 \qquad w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Problème 1

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ avec $u_0 = 2$.

1. Etude préliminaire :
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$.
   (b) Démontrer que la suite u possède une unique limite éventuelle et expliciter cette limite.

   La suite de l'exercice est consacrée à l'étude de la convergence de la suite. u On propose deux approches différentes.

2. Première méthode :
   (a) Vérifier que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ définie une suite géométrique.
   (b) Expliciter l'expression de v_n en fonction de n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

3. Deuxième méthode :
   (a) Déterminer le signe de $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x$ selon les différentes valeurs de x.
   (b) Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.
   (c) Prouver que la suite u converge et expliciter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème 2

Première partie

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2(\ell - a_n).$$

1. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\frac{2}{3}\ell$.
2. On pose $w_n = a_n - \frac{2}{3}\ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2.
   (b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, a_0 et ℓ.
   (c) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est constante égale à $\frac{2}{3}\ell$.

Seconde partie (rédaction facultative)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si a est la limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous démontrons dans cette partie quelques propriétés de $\mathscr{A}$ et le résultat suivant :

Théorème. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et possède une unique valeur d'adhérence ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
   (a) Pourquoi $\mathscr{A}$ est non vide ?
   (b) Montrer que $\mathscr{A}$ est borné.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et admettant une unique valeur d'adhérence ℓ.
   Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\Gamma = \{u_n \ / \ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon\}$ soit infini.
   (b) En déduire qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in \Gamma$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   Indication : on pourra utiliser, en justifiant, l'existence d'une sous-suite convergente de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième partie Bonus

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{u_{2n}}{2}$.

1. Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $2(\ell - a)$ est encore une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2(\ell - a_n)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Problème 3

Quelques pépites extraites du nombre d'or.

– On pose $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*) et $\widehat{\Phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  On observera que Φ et $\widehat{\Phi}$ sont les solutions de $x^2 = x+1$, et que $\widehat{\Phi} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

– Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.

Première partie

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$ (où 1 apparaît n fois).
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que sa limite est égale à Φ. [S]

2. On pose $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour $n \geqslant 1$.
   En s'aidant de la suite de terme général $w_n = \dfrac{v_n - \Phi}{v_n - \widehat{\Phi}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \Phi$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie les relations entre le nombre d'or et la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que celle-ci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Dans cette question, on établit une expression de F_n en fonction Φ^n et de $\widehat{\Phi}^n$.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n)$. [S]
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$. [S]

2. En utilisant Φ, on trouve ici des relations de récurrence d'ordre 1 entre les F_n.
   (a) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $F_{n+1} = \Phi F_n + \widehat{\Phi}^n$. [S]
   (b) Inversement, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on $\Phi^{n+1} = \Phi F_{n+1} + F_n$. [S]
   (c) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $F_{2n} = [\,\Phi\, F_{2n-1}\,]$ et $F_{2n+1} = [\,\Phi\, F_{2n}\,] + 1$. [S]
   (d) Déduire de $(2a)$ que $F_{n+1} = [\,\Phi F_n - \widehat{\Phi}\,]$ pour tout $n \geqslant 2$. [S]
   (e) Montrer que la suite de terme général $u_n = F_n + 1$ vérifie : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_{n+1} = [\,\Phi u_n]$. [S]

3. Dans cette question, on pose $q_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Φ. [S]
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, prouver qu'on a l'égalité $q_{n+1} - q_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}$. [S]
   (c) Établir que les suites $(q_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(q_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. [S]
   (d) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}$. [S]
   (e) En revenant aux notations de (I.2), montrer que $q_n = v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]