Intégration

Préparation DS

Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) À l'aide d'une intégration par parties, donner un sens à l'intégrale impropre $F = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $\forall x \in]0, \pi[\quad \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$.

En déduire : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

3) **a)** Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$; montrer à l'aide d'une intégration par parties que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$ converge vers 0.

b) Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$ et $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} & \text{si } x \in]0, \pi/2] \\ g'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

En déduire que la suite de terme général $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x) \frac{\sin nx}{x} \mathrm{d}x$ converge vers $F.g(0)$.

4) Montrer que $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in]0, \pi/2] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$.

5) En déduire la valeur de F.

Problème B

1) Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2xt + 1}$.
Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer au moyen d'une primitive.

2) On pose alors, pour tous réels a, b tels que $a^2 - 4b < 0$: $G(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + at + b}$.
Donner pour $G(a, b)$ une expression très simple utilisant F.

3) Pour $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$, montrer que la fraction rationnelle :

$$\Phi(X) = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + aX + b)(X^2 - aX + b)}$$

peut se décomposer sous la forme

$$\Phi(X) = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 + aX + b} + \frac{-\lambda X + \mu}{X^2 - aX + b}$$

où λ et μ sont deux réels que l'on précisera.

4) Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

5) Calculer enfin, en utilisant les résultats précédents, la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 + \sin^4 \varphi}$.

Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) C'est un exemple du cours : soient ε et X tels que $0<\varepsilon<X$; j'intègre par parties :

$$\int_{\varepsilon}^{X}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\left[(1-\cos t)\,\frac{1}{t}\right]_{\varepsilon}^{X}+\int_{\varepsilon}^{X}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\ .$$

Comme les fonctions intégrées se prolongent par continuité en 0, j'obtiens lorsque ε tend vers 0

$$\int_{0}^{X}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1-\cos X}{X}+\int_{0}^{X}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\ .$$

Or $\dfrac{1-\cos X}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et la fonction $t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ (prolongée par continuité en 0) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, et $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$). En conclusion

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{0}^{X}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qui donne un sens à l'intégrale impropre

$$\boxed{F=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.}$$

2) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\,]0,\pi[$. J'ai

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad 2\sin x\cos 2kx=\sin(2k+1)\,x-\sin(2k-1)\,x,$$

d'où, en constatant l'hécatombe

$$\sum_{k=1}^{n}2\sin x\cos 2kx=\sin(2n+1)\,x-\sin x.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par $\sin x$ (qui est strictement positif)

$$\boxed{\forall x\in\,]0,\pi[\quad\frac{\sin(2n+1)\,x}{\sin x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx.}$$

(Autres idées récurrence ou utilisation de $\sum e^{2ikx}\dots$)

La fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(2n+1)\,x}{\sin x}$ se prolonge par continuité en 0 et j'obtiens en intégrant la relation précédente (par linéarité de l'intégrale, il s'agit d'une somme finie !) :

$$\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)\,x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi/2}\cos 2kx\mathrm{d}x,$$

soit

$$\boxed{\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)\,x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.}$$

3) a) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$; pour $n\in\mathbb{N}^*$, j'intègre par parties (f et $x\mapsto-\dfrac{\cos nx}{n}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$I_n=\left[-f(x)\,\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi/2}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

d'où, en notant $M_0=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f|$ et $M_1=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f'|$, $|I_n|\le\frac{2M_0}{n}+\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}M_1$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n=\int_{0}^{\pi/2}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \text{ converge vers } 0.}$$

b) Par construction, f est continue sur $[0,\pi/2]$, de classe $\mathcal{C}^1$ (car $\mathcal{C}^2$) sur $]0,\pi/2]$ avec, en utilisant la formule de Taylor-Young pour g et pour g' :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,\pi/2] \quad f'(x) &= \frac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}\\
&= \frac{x\left(g'(0)+xg''(0)+o(x)\right)-\left(g(0)+xg'(0)+\frac{x^2}{2}g''(0)+o\left(x^2\right)\right)+g(0)}{x^2}\\
&= \frac{g''(0)}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

Par conséquent, f' admet une limite finie en 0, donc (théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$)

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

D'après le **a)**, la suite de terme général I_n converge vers 0, où :

$$I_n=\int_0^{\pi/2} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{g(x)-g(0)}{x}\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{g(x)\sin nx}{x}\mathrm{d}x-g(0)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière égalité est justifiée par l'intégrabilité des deux fonctions apparaissant (elles se prolongent par continuité en 0). Ainsi, grâce au changement de variable $t=nx$:

$$I_n=J_n-g(0)\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\quad \text{soit}\quad J_n=g(0)\,\Phi(n\pi/2)+I_n,$$

où $\Phi : X\mapsto \displaystyle\int_0^X\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ admet pour limite F en $+\infty$ (d'après **1)**). Finalement :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } J_n=\int_0^{\pi/2} g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x \text{ converge vers } F\cdot g(0).}$$

4) $g : x\mapsto \begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\in]0,\pi/2]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ est l'inverse de $h : x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\in]0,\pi/2]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ (qui ne s'annule pas). Il suffit de montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$. On vérifie comme au **3)b)** que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, avec $h' : x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \text{si } x\in]0,\pi/2]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$. J'applique maintenant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à h', qui est continue sur $[0,\pi/2]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$, avec, tous calculs faits,

$$\forall x\in]0,\pi/2]\quad h''(x)=\frac{\left(2-x^2\right)\sin x-2x\cos x}{x^3}=-\frac{1}{3}+o(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{3}.$$

Ainsi, h' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, autrement dit

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

5) Appliqué à cette fonction g, le **2)** m'apprend que la suite (J_n) converge vers F (puisque $g(0)=1$). Or le **2)** montre que $J_{2n+1}=\dfrac{\pi}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où, par unicité de la limite de cette suite extraite

$$\boxed{F=\frac{\pi}{2}.}$$

Problème B

1) Soit $x\in]-1,1[$, j'ai

$$t^2+2xt+1=(t+x)^2+1-x^2,$$

Puisque $1-x^2>0$, il en résulte que la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2+2xt+1}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}^+$; en outre j'ai les primitives

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2xt+1}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{t+x}{\sqrt{1-x^2}}+C^{ste}.$$

Par conséquent, pour tout $T > 0$

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2xt+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\frac{T+x}{\sqrt{1-x^2}} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Cette expression admettant une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$, l'existence de $F(x)$ est justifiée, avec plus précisément

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).}$$

2) Par hypothèse, $a^2-4b<0$, ainsi j'ai nécessairement $b>0$ et donc, grâce au changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = t\sqrt{b}$, j'ai

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+b} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{b}\mathrm{d}t}{b\left(t^2+\frac{a}{\sqrt{b}}t+1\right)},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{G(a,b) = \frac{1}{\sqrt{b}}F\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right).}$$

(Noter que $\frac{a}{2\sqrt{b}}$ est bien dans $]-1,1[$, puisque $\frac{a^2}{4b}<1$.)

3) Pour des raisons de parité, je cherche une décomposition de Φ sous la forme

$$\Phi(X) = \frac{\lambda X+\mu}{X^2+aX+b} + \frac{-\lambda X+\mu}{X^2-aX+b}.$$

Pour une fois, bricolons ! La valeur de $\Phi(0)$ me donne $\mu = \frac{1}{2b}$ et celle de $\Phi\left(i\sqrt{b}\right)$ (on peut bricoler habilement !) fournit $\lambda = \frac{1-b}{2ab}$ et l'on vérifie "aisément" que

$$\boxed{\Phi(X) = \frac{1}{2ab}\left[\frac{(1-b)X+a}{X^2+aX+b} + \frac{(b-1)X+a}{X^2-aX+b}\right].}$$

4) $X^4+X^2+\frac{1}{2} = \left(X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)X^2$, soit

$$\boxed{P(X) = \left(X^2+aX+b\right)\left(X^2-aX+b\right) \quad \text{où} \quad a = \sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

(Noter que $a>0$ et $a^2-4b = -1-\sqrt{2}<0$.)

5) I est bien définie, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, je peux aussi la considérer comme une intégrale sur $[0,\pi/2[$! Pour calculer I, les règles de Bioche m'incitent à poser le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $\varphi \longmapsto \tan\varphi$, de $[0,\pi/2[$ dans $[0,+\infty[$ (d'où la remarque précédente !), de sorte que

J'ai alors

$$\varphi = \arctan t\ ;\ \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\ ;\ \sin^4\varphi = \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)^2 = \frac{t^4}{\left(t^2+1\right)^2},$$

d'où (puisque I converge)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\sin^4\varphi} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{P(t)}\mathrm{d}t.$$

Je reprends alors les valeurs a, b du **4)** et j'applique le résultat du **3)**

$$(1-b)X+a = \frac{1-b}{2}(2X+a) + a\cdot\frac{1+b}{2} \quad \text{et} \quad (b-1)X+a = \frac{b-1}{2}(2X-a) + a\cdot\frac{1+b}{2}$$

d'où

$$\int \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t) + C^{ste} \quad \text{où} \quad \Psi(t) = \frac{1-b}{4ab}\cdot\ln\frac{t^2+at+b}{t^2-at+b} + \frac{1+b}{4b}\cdot\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+at+b} + \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-at+b}\right).$$

Il en résulte, grâce au **1)** et au **2)**,

$$2I = \lim_{t \to +\infty} \Psi(t) - \Psi(0) = \frac{1+b}{4b} \cdot \big(G(a,b) + G(-a,b) \big) = \frac{1+b}{4b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{4b}}} \cdot \pi.$$

Or

$$\frac{1+b}{4b} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad b - \frac{a^2}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

d'où finalement

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{4} \cdot \pi.}$$

(Il est satisfaisant de vérifier à la calculatrice que $I \approx 1,22033$!)