

Devoir Maison 1

## Raisonnements & Sommes

A rendre 27-09-2020

### Problème A :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

(a)  $2x^3 + 3x^2 - 27x = 0$

(b)  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-1}{x-3}$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\sqrt{3x^2 + 4x + 2} > 2x + 3$ .

### Problème B :

1. Montrer que pour tous réels  $x, y$  on a :

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

2. En déduire que pour tous réels strictement positifs  $a, b, c$ , on a :

$$(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$$

3. En notant  $S = a + b + c$ , développer et simplifier le produit :

$$(S - a)(S - b)(S - c)$$

4. Déduire de 2. et 3. que :

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

### Problème C :

On admet que :

$$(E) \forall x \in \mathbb{R}, \sin(5x) = 16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x)$$

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $16X^2 - 20X + 5 = 0$ .

b) Montrer que :  $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

c) Déterminer la valeur de  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  en évaluant en  $\frac{\pi}{5}$  l'équation (E).

d) En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

e) Montrer que  $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$ .

f) En déduire une écriture plus simple de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

Problème D :

1. Soient les quatre assertions suivantes :

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

c)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

d)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

(a) Les assertions  $a, b, c, d$  sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(b) Donner leur négation.

2. Dans chaque exemple, y-a-t-il équivalence entre l'assertion A et l'assertion B ? Donner l'implication vraie s'il y en a une.

Exemple 1 : A : Il existe des champignons radioactifs.

B : Aucun champignon n'est sain.

Exemple 2 : A : Pour chaque enseignant, il existe une blague qui le fait rire.

B : Il existe une blague qui fait rire tous les enseignants.

Problème E :

1. Calculer  $\cos\left(\frac{375\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{132\pi}{3}\right)$ .

2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $] - \pi; \pi ]$  :  $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

3. Résoudre sur  $] - \pi; \pi ]$  :  $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$ .

