

Devoir Maison 1

Raisonnements
Corrigé

Problème A :

1(a) On a $2x^3 + 3x^2 - 27x = x(2x^2 + 3x - 27)$ donc, par règle du produit nul, $x = 0$ ou $2x^2 + 3x - 27 = 0$.

Pour résoudre la deuxième équation, on calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-27) = 225 > 0$.
Donc les deux solutions sont $x_1 = \frac{-3-15}{4} = -\frac{9}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+15}{4} = 3$.

Donc finalement $S = \{-\frac{9}{2}; 0; 3\}$.

(b) On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x = -1$ ou $x = 1$. Le domaine de résolution est donc $] -\infty; -1[\cup] -1; 1[\cup] 1; +\infty[$. Sur ce domaine, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1+x+1-(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2+2x+1 &= 0 \quad \text{sur le domaine de résolution.} \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 8$ et les deux solutions sont $x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

$$S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}.$$

2. On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x = 2$ ou $x = 3$. Le domaine de résolution est donc $] -\infty; 2[\cup] 2; 3[\cup] 3; +\infty[$. Sur ce domaine, on a

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &\leq \frac{x-1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} &\leq 0 \end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	3	5	$+\infty$
$x - 5$	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	0	+	+
$\frac{x-5}{(x-2)(x-3)}$	-	+	-	0	+

On a donc $S =]-\infty; 2[\cup]3; 5]$.

3. On étudie d'abord le domaine de définition. Pour le polynôme $3x^2 + 4x + 2$, on a $\Delta = -8$ donc le domaine est \mathbb{R} . Ensuite, remarquons que si $2x + 3 < 0$, c'est à dire $x < -\frac{3}{2}$ alors x est solution. Il reste à étudier le cas $x \geq -\frac{3}{2}$. On peut ici élever au carré, on obtient alors $3x^2 + 4x + 2 > 4x^2 + 12x + 9$ donc $0 > x^2 + 8x + 7$. Les racines -1 et -7 sont évidentes donc finalement, $S =]-\infty; -1[$.

Problème B :

- Pour tous réels x, y on a : $(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$ donc $(x + y)^2 \geq 4xy$.
- Comme a, b, c sont strictement positifs, par passage au carré, on a : $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc \iff (b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2 \geq 64a^2b^2c^2$.
Or en appliquant la question 1 avec b, c puis a, c puis a, b , on a : $(b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2 \geq 4bc \times 4ac \times 4ab = 64a^2b^2c^2$.
- $(S - a)(S - b)(S - c) = S^3 - S^2(a + b + c) + S(ab + ac + bc) - abc$ or $S = a + b + c$ donc $S^2(a + b + c) = S^3$ et $(S - a)(S - b)(S - c) = S(ab + ac + bc) - abc$.
- En utilisant 2., on a : $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$ donc $(S - a)(S - b)(S - c) \geq 8abc$.
En utilisant 3., on obtient $S(ab + ac + bc) - abc \geq 8abc$ donc $S(ab + ac + bc) \geq 9abc$.
Finalement, $\frac{S(ab+ac+bc)}{abc} \geq 9$, c'est à dire $(a + b + c) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \geq 9$.

Problème C :

a) On calcule $\Delta = 400 - 320 = 80$ donc les solutions sont $X_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $X_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$.

b) Comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $0 < 5 - \sqrt{5} < 4 < 5 + \sqrt{5}$.
Donc $\frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$. Et comme tous les termes sont positifs,
 $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

c) En remplaçant x par $\frac{\pi}{5}$ dans (E) et comme $\sin(\pi) = 0$, on a :
 $16 \sin^5(\frac{\pi}{5}) - 20 \sin^3(\frac{\pi}{5}) + 5 \sin(\frac{\pi}{5}) = 0$. Posons alors $X = \sin(\frac{\pi}{5})$, on a :
 $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0 \iff X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$. En utilisant la question a),
on obtient :
 $X = 0$ ou $X = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ ou $X = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.
Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < \sin(\frac{\pi}{5}) < \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc finalement $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

d) Comme $\cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, on a :
 $\cos(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$.

e) D'après la question b), on a : $16 \sin^4(\frac{\pi}{5}) - 20 \sin^2(\frac{\pi}{5}) + 5 = 0$ donc
 $16(1 - \cos^2(\frac{\pi}{5}))^2 - 20(1 - \cos^2(\frac{\pi}{5})) + 5 = 0$ donc $16 \cos^4(\frac{\pi}{5}) - 12 \cos^2(\frac{\pi}{5}) + 1 = 0$. Or
 $4 \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2 \cos(\frac{\pi}{5}) - 1 = 0 \iff 4 \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1 = 2 \cos(\frac{\pi}{5})$
 $\iff (4 \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1)^2 = (2 \cos(\frac{\pi}{5}))^2 \iff 16 \cos^4(\frac{\pi}{5}) - 8 \cos^2(\frac{\pi}{5}) + 1 = 4 \cos^2(\frac{\pi}{5})$. CQFD

f) En posant $X = \cos(\frac{\pi}{5})$ dans e), on a $4X^2 - 2X - 1 = 0$ dont les solutions sont
 $X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, on obtient $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Problème D :

- 1(a) a) VRAI : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $y = -x + 1$ et on a $x + y = 1 > 0$.
b) FAUX : Pour $x = 0$ et $y = 0$, on a $x + y = 0$.
c) FAUX : supposons qu'il existe un tel x , alors $y = -x - 1$ donc $x + y = -1$ ce qui est une contradiction.
d) VRAI : Pour $x = -1$, on a bien $\forall y \in \mathbb{R}$, $y^2 > -1$.
- (b) a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$.

2. Exemple 1 : Il n'y a aucune implication dans un sens ou dans l'autre.

Exemple 2 : On a clairement $B \Rightarrow A$ mais la réciproque est fautive car ce n'est pas forcément la même blague qui fait rire tous les enseignants dans A donc il n'y a pas équivalence.

Problème E :

1. $\cos\left(\frac{375\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\frac{132\pi}{3}\right) = \sin(0) = 0$.

2. \mathbb{R} puis sur $] -\pi; \pi]$: $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ a pour solution $2x \equiv x + \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x \equiv -x - \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{9}[2\pi]$.

Donc sur \mathbb{R} , $S = \left\{-\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]; \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ et sur $] -\pi; \pi]$, $S = \left\{-\frac{7\pi}{9}; -\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{9}\right\}$.

3. Il suffit de faire un dessin pour voir $S = \left] -\pi; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

