Devoir Maison N° 16

Déterminants

Concours National Commun – Session 2019 – MP

Problème
Déterminants de Cauchy et de Gram
Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p. Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\det M$ son déterminant et ${}^tM$ sa transposée.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Calcul du déterminant de Cauchy

On considère un entier $n \geqslant 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m, associé aux familles $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, est le nombre, noté Δ_m, égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

2.1. On suppose qu'il existe $(i_1,i_2) \in \{1,\dots,n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux **distincts** *et on considère la fraction rationnelle*

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)}.$$

2.2. Justifier que les polynômes $\prod_{k=1}^{n-1}(X - b_k)$ et $\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

2.3. Décomposition en éléments simples de la fraction R

2.3.1. Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

2.3.2. En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme $R = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k}$ en précisant les expressions des réels α_k en fonction des a_k et des b_k.

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Montrer que $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.

2.4.2. En déduire que $\alpha_n \Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3. Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad \Delta_n = \dfrac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$.

Correction

Première partie
Calcul de déterminant de Cauchy

2.1 Si $a_{i_1} = a_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$, alors les deux lignes correspondantes dans Δ_n sont égales et donc $\Delta_n = 0$.

2.2 Les deux polynômes sont scindés, l'intersection de leurs ensembles des racines est vide, puisque $a_i \neq -b_j$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, donc ils sont premiers entre eux

2.3 **Décomposition en élément simple de la fraction** R

2.3.1 Les pôles de R sont les racines du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$, c'est-à-dire les $(-a_k)_{1\leq k\leq n}$ et comme elles sont distinctes, alors R admet des pôles simples.

2.3.2 Puisque R admet des pôles simples qui sont les $(-a_k)_{1\leq k\leq n}$, et $\deg((X - b_1)...(X - b_{n-1})) < \deg((X + a_1)..(X + a_n))$, la partie entière de R est nulle. R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k}.$$

Les α_k sont des réels déterminés par la méthode usuelle dans le cas d'une fraction à pôles simples. En effet, $\alpha_k = \lim\limits_{x \to -a_k} (x+a_k)R(x)$, c'est-à-dire

$$\alpha_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(-a_k - b_j)}{\prod\limits_{j \neq k}(-a_k + a_j)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(a_k + b_j)}{\prod\limits_{j \neq k}(a_k - a_j)}.$$

2.4 Application au calcul de Δ_n

2.4.1 On note $L_1, ..., L_n$ les lignes de Δ_n. On effectue sur Δ_n la transformation $L_n \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$ avec $\alpha_n \neq 0$. On obtient $\Delta_n = \dfrac{1}{\alpha_n} D_n$ où D_n est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de Δ_n par la ligne $(R(b_1), R(b_2), ..., R(b_n))$:

$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} \\ R(b_1) & \dots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

2.4.2 Il est clair que $R(b_1) = ... = R(b_{n-1}) = 0$, donc en développant D_n suivant sa dernière ligne, on obtient la relation : $\alpha_n \Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_1+b_2)(a_2+b_1)}$$

$$= \frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_1+b_2)(a_2+b_1)}.$$

On sait que $\Delta_n = \dfrac{R(b_n)}{\alpha_n}\Delta_{n-1}$, avec $\alpha_n = \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(a_n+b_j)}{\prod\limits_{j \neq n}(a_n - a_j)}$. D'où :

$$\Delta_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_n - b_k}{b_n + a_k}\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{a_n + b_k}\right] \frac{\Delta_{n-1}}{a_n + b_n}$$

et comme $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, on en déduit par récurrence sur n la formule fournie par l'énoncé :

$$\Delta_n = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)}$$