

Devoir Maison N°5

Nombres Complexes

EXERCICE 1.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - (4 - 2i)z + 11 - 10i = 0$$

2. On se place dans le plan complexe et on note A et B les points dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer les points C tels que ABC est un triangle rectangle et isocèle en C.
3. Représenter dans le plan complexe les triangles ABC trouvés.

EXERCICE 2.

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit l'ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.

2. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de f sur \mathbb{R} ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

3. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Montrer que

$$|z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos \theta)$$

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.

2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \frac{2}{1-\omega}$.

3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

Problème 1 –

Partie I – Étude d’une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f .
2. L’application f est-elle injective ?
3. Montrer que f est surjective.

Partie II – Une suite d’applications

On définit une suite d’applications (φ_n) de \mathbb{C} dans \mathbb{C} en posant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

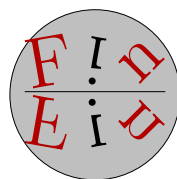
et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{n+2}(z) = z \varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.
2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l’équation $f(z^n) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
5. En déduire les solutions de l’équation $\varphi_n(z) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.



CORRIGE

Problème 1 – Tchebychev : premier contact

Partie I – Étude d'une application

- Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z) = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de i par f .
- On vient de voir que i admettait deux antécédents par f : f n'est donc pas injective.
- Soit $Z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation (E) : $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2 - zZ + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par f . L'application f est donc surjective.

Partie II – Une suite d'applications

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi_2(z) = z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2$$

$$\varphi_3(z) = z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z$$

$$\varphi_4(z) = z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2$$

- Les solutions de l'équation $\varphi_2(z) = 0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z) = 0$ sont $0, -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
L'équation $\varphi_4(z) = 0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z = z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2 - 4Z + 2 = 0$ sont $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z) = 0$ sont

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}}, -\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

- On note P_n l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

Puisque pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_0(z) = 2$ et $f(z^0) = f(1) = 2$, P_0 est vraie. De même, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$ et $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z)) \\ &= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi P_{n+2} est vraie.

Par récurrence double, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'équation $f(z^n) = 0$ équivaut à $z^{2n} = -1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1 , c'est-à-dire

$$A_n = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

5. Remarquons que pour $\omega \in A_n$,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les $f(\omega)$ pour $\omega \in A_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Puisque f est surjective, il existe donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha = f(\omega)$. Alors $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$ de sorte que ω est solution de l'équation $f(z^n) = 0$. Il existe donc $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha = f(\omega) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z) = 0$ est

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de B_n figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned} \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\} &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow k+n \\ &= \left\{ 2 \cos\left(\pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow n-1-k \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ est donc n .

REMARQUE. Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions φ_n sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*. ■

SOLUTION 1.

1. Le discriminant de l'équation est $\Delta = -32 + 24i$. Or

$$\Delta = 4(-8 + 6i) = 2^2(1 + 3i)^2 = (2 + 6i)^2$$

donc les solutions de l'équation sont

$$a = \frac{4 - 2i + 2 + 6i}{2} = 3 + 2i \quad \text{et} \quad b = \frac{4 - 2i - 2 - 6i}{2} = 1 - 4i$$

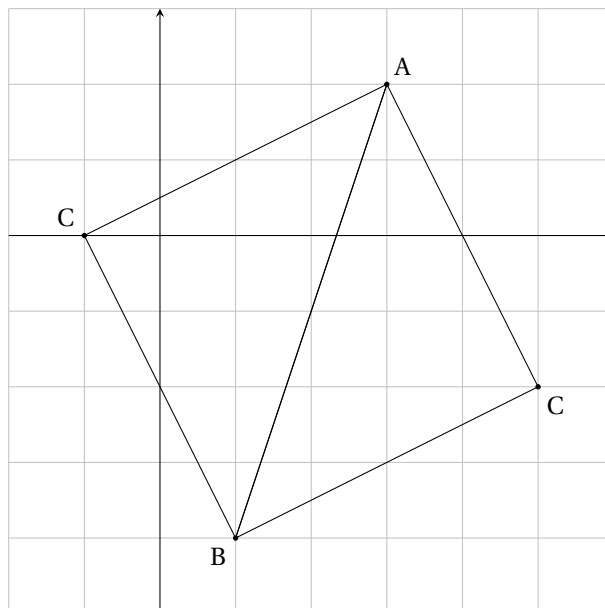
2. Notons c l'affixe du point C. Le point C convient si et seulement si $CA=CB$ et $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui équivaut en termes d'affixes à

$$\left| \frac{b-c}{a-c} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Autrement dit, c convient si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} = \pm i$ autrement dit si et seulement si

$$c = \frac{b-ia}{1-i} = 5-2i \quad \text{ou} \quad c = \frac{b+ia}{1+i} = -1$$

3. On représente les deux triangles déterminés à la question précédente.



SOLUTION 2.

1.

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

2. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{13}{4}$	$\searrow \frac{2}{27}$	$\nearrow +\infty$	

3. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned} |z^3 - z + 2|^2 &= (z^3 - z + 2)\overline{(z^3 - z + 2)} \\ &= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z + \bar{z}) - |z|^2(z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \\ &= 6 - 2(z + \bar{z}) - (z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \text{ car } |z| = 1 \\ &= 6 - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 2(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) \quad \text{car } z = e^{i\theta} \\ &= 6 - 4\cos\theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \quad \text{en vertu d'une relation d'Euler} \\ &= 6 - 4\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= 8 - 16\cos\theta - 4\cos^2\theta + 16\cos^3\theta \\ &= 4f(\cos\theta) \end{aligned}$$

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\text{Im} \cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x \in [-1, 1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1, 1]$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\frac{13}{4}$		$\frac{2}{27}$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de \mathbb{U} dont un argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2 .

SOLUTION 3.

1. Si on avait $\omega = 1$, on aurait $\omega^n = 1$ et donc $-1 = 1$, ce qui est faux. Ainsi $\omega \neq 1$.

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi

$$A_n = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - \omega} = \frac{2}{1 - \omega}$$

3. Classiquement

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Re}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Re}(\omega^k) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \text{Re}(A_n) \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(\omega^k) = \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \text{Im}(A_n) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode de l'arc-moitié :

$$A_n = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}})} = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{i(\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n})}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2n} + i \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 1 + i \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

On en déduit les résultats voulus.

4. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\omega^{2k} - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin \frac{k\pi}{n}$$

Puisque $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$, $\sin \frac{k\pi}{n} \geq 0$ de sorte que

$$|\omega^{2k} - 1| = 2|i| \left| e^{\frac{ik\pi}{n}} \right| \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

Ainsi

$$B_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = 2S_n = \frac{2 \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$