Devoir Maison N°9

Structures Algébriques

Sous-groupes distingués

Soit G un groupe, qui n'est pas supposé abélien. On note $(a,b) \mapsto ab$ la loi de G.
On note e le neutre de G, et a^{-1} le symétrique de tout élément a de G.

Pour toute partie X non vide de G, et pour tous éléments a, b de G, on pose :

$$aX = \{ax,\ x \in X\} \qquad Xb = \{xb,\ x \in X\} \qquad aXb = a(Xb) = (aX)b = \{axb,\ x \in X\}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes et n'ont pas à être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \qquad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)\,b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \qquad eX = Xe = X$$

On rappelle que les automorphismes intérieurs de G sont les applications φ_a définies par :

$$\forall\, a \in G,\ \forall\, x \in G,\ \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

I. Définition des sous-groupes distingués

1. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - *i)* Pour tout a de G, $aH \subset Ha$
   - *ii)* Pour tout a de G, $Ha \subset aH$
   - *iii)* Pour tout a de G, $aH = Ha$

   On dit qu'un sous-groupe H de G est *distingué* s'il vérifie ces conditions.
2. Soit H un sous-groupe d'un groupe G.

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - *i)* H est distingué dans G
   - *ii)* $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} = H$
   - *iii)* $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} \subset H$

   Exprimer cette propriété avec la terminologie des automorphismes intérieurs de G.

II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe. Vérifier que $\{e\}$ et G sont distingués dans G.
2. Que peut-on dire des sous-groupes distingués d'un groupe abélien G ?
3. Soient G et $\widetilde{G}$ deux groupes. Soit $f : G \to \widetilde{G}$ un morphisme de groupes.
   (a) On suppose que $\widetilde{H}$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$.
   Montrer que son image réciproque par f est un sous-groupe distingué H de G.
   (b) Dans cette question, on suppose que le morphisme f est surjectif.
   Soit H un sous-groupe distingué de G.
   Montrer que $\widetilde{H} = f(H)$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$.
   (c) Que dire du noyau de f ?

III. Centre et centralisateurs

Soit G un groupe. Soit X une partie non vide quelconque de G.

On appelle *centralisateur* de X l'ensemble $X' = \{a \in G, \forall\, x \in X, ax = xa\}$.

On appelle *centre* de G l'ensemble $C = \{a \in G, \forall\, x \in G, ax = xa\}$.

Le centre de G est donc le centralisateur G' de G lui-même.

1. (a) Montrer que X' est un sous-groupe de G.
   (b) Montrer que le sous-groupe C est distingué dans G.
2. Avec les automorphismes intérieurs, retrouver que C est distingué dans G.
3. Dans cette question X et Y sont deux parties non vides quelconques de G.
   (a) Vérifier que $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$.
   (b) On pose $X'' = (X')'$. Montrer que X est inclus dans X''.
   (c) On pose $X''' = ((X')')')$. Montrer que $X' = X'''$.
4. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe de G.
   (a) Montrer les équivalences : H abélien$\Leftrightarrow H \subset H' \Leftrightarrow H''$ abélien.
   (b) Montrer que si H est distingué, alors H' est distingué.

IV. Produit de deux sous-groupes

Dans cette partie, H et K sont deux sous-groupes quelconques de G.

On pose $HK = \{hk,\ h \in H,\ k \in K\}$ et $KH = \{kh,\ k \in K,\ h \in H\}$.

1. Montrer que $HK \subset KH \Leftrightarrow KH \subset HK \Leftrightarrow HK = KH$.
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
3. On suppose que l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué.
   Montrer que $HK = KH$. Conclusion ?

V. Quotient par un sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe quelconque de G.

On définit sur G une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
   Quelle est cette relation si $H = G$? si $H = \{e\}$?
2. Vérifier que la classe d'équivalence d'un élément a de G est $\overline{a} = aH$.
3. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe distingué de G.
   On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de G pour la relation $\mathcal{R}$.
   (a) Soient x et y deux éléments de G. Montrer que $\overline{xy}$ ne dépend que de $\overline{x}$ et de $\overline{y}$.
   (b) On peut donc définir une loi sur G/H en posant : $\forall\,(x, y) \in G^2$, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$.
   Montrer qu'alors G/H est un groupe. Quel est le neutre ? l'inverse de $\overline{x}$?
   On dit que G/H est le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H.
   (c) Montrer l'équivalence des deux propriétés :
   – Le groupe G/H est commutatif.
   – Pour tous x, y de G, l'élément $y^{-1}x^{-1}yx$ est dans H.

Corrigé

I. Définition des sous-groupes distingués

1. Il suffit évidemment de montrer l'équivalence des conditions $i)$ et $ii)$.
   - On suppose que l'hypothèse $i)$ est vérifiée. Soit a dans G.

     Avec l'hypothèse, $a^{-1}H \subset Ha^{-1}$. On multiplie par a à gauche et à droite.

     On en déduit $a(a^{-1}H)a \subset a(Ha^{-1})a$ c'est-à-dire $Ha \subset aH$.
   - C'est la même démonstration pour passer de $ii)$ à $i)$.

     On part de $Ha^{-1} \subset a^{-1}H$ qui découle de $ii)$ et on multiplie par a des deux cotés.
2. - On suppose que H est distingué dans G.

     Pour tout a de G : $aHa^{-1} = a(Ha^{-1}) = a(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = H$.
   - La condition $ii)$ implique évidemment la condition $iii)$.
   - On suppose que la condition $iii)$ est vérifiée.

     Pour tout a de G : $aH \supset a(a^{-1}Ha)$, et $a(a^{-1}Ha) = (aa^{-1})Ha = Ha$.

     On en déduit $aH \supset Ha$: H est donc distingué, ce qui achève la démonstration.
   - Les automorphismes intérieurs de G sont les $\varphi_a : x \mapsto axa^{-1}$.

     Soit H un sous-groupe de G. Pour tout a de G, on a $\varphi_a(H) = aHa^{-1}$.

     Donc H est distingué$\Leftrightarrow$il vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :

     $i)$ H est *stable* par les automorphismes intérieurs : $\forall\, a \in G,\ \varphi_a(H) \subset H$.

     $ii)$ H est *invariant* par les automorphismes intérieurs : $\forall\, a \in G,\ \varphi_a(H) = H$.

II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Pour tout a de G : $a\{e\} = \{e\}a = \{a\}$. Le sous-groupe $\{e\}$ est distingué dans G.
   Pour tout a de G, $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ sont des bijections de G dans lui-même.
   On a donc $aG = Ga = G$: le groupe G est un sous-groupe distingué de G.
2. Si G était abélien, tout sous-groupe H de G serait distingué ($aH = Ha$ étant évident)
3. (a) H est un sous-groupe de G (image réciproque de $\widetilde{H}$ par un morphisme de groupes.)
   Soit a un élément de G. Il reste à montrer, par exemple, que $aHa^{-1} \subset H$.
   Pour tout h de H, on a : $f(aha^{-1}) = f(a)f(h)f(a^{-1}) = bf(h)b^{-1}$, en notant $b = f(a)$.
   Or $\widetilde{h} = f(h)$ est dans $\widetilde{H}$ qui est distingué dans $\widetilde{G}$.
   On en déduit $f(aha^{-1}) = b\widetilde{h}b^{-1} \in \widetilde{H}$.
   Autrement dit, aha^{-1} est dans H, ce qui prouve que H est distingué.

   (b) $\widetilde{H}$ est un sous-groupe de $\widetilde{G}$ (image directe de H par un morphisme de groupes.)
   Soient $\widetilde{a}$ dans $\widetilde{G}$ et $\widetilde{h}$ dans $\widetilde{H}$. Il suffit de montrer que $\widetilde{a}\,\widetilde{h}\,\widetilde{a}^{-1}$ est dans $\widetilde{H}$.
   f étant surjective, il existe a dans G et h dans H tels que $\widetilde{a} = f(a)$ et $\widetilde{h} = f(h)$.
   On en déduit $\widetilde{a}^{-1} = f(a^{-1})$ puis $\widetilde{a}\,\widetilde{h}\,\widetilde{a}^{-1} = f(a)f(h)f(a^{-1}) = f(aha^{-1})$.
   Hors H est distingué. Il en résulte que aha^{-1} est dans H.
   On en déduit que $\widetilde{a}\,\widetilde{h}\,\widetilde{a}^{-1}$ est dans $\widetilde{H}$, ce qui prouve que $\widetilde{H}$ est distingué.

   (c) $\{e_{\widetilde{G}}\}$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$.
   Ainsi $\ker f = \overset{-1}{f}(\{e_{\widetilde{G}}\})$ est un sous-groupe distingué de G.

III. Centre et centralisateurs

1. (a) Le neutre e commute avec tous les éléments de X, donc il est dans X'.
   Soient a et b deux éléments de X'. Pour tout x de X :
   ◇ On a $ax = xa$ donc $x = a^{-1}xa$ puis $xa^{-1} = a^{-1}x$. Ainsi $a^{-1} \in X'$.
   ◇ On a $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$. Ainsi $ab \in X'$.
   L'ensemble X' est non vide, stable pour la loi de G et pour le passage à l'inverse.
   X' est donc un sous-groupe de G.

   (b) Il reste à montrer que le sous-groupe C de G est distingué.
   Or : $\forall\, a \in C,\ \forall\, x \in G,\ ax = xa$ (car a commute avec tous les x de G).
   Pour tout x de G, on a donc $xC = Cx$, ce qui achève la démonstration.
   Remarque 1 : la restriction à C d'un automorphisme intérieur est l'identité.

2. On sait que $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de G dans le groupe Aut(G).
   Soit a dans G : $a \in C \Leftrightarrow \forall\, x \in G,\ ax = xa \Leftrightarrow \forall\, x \in G,\ axa^{-1} = x \Leftrightarrow \varphi_a = \mathrm{Id}$.
   Ainsi le centre de G est le noyau du morphisme φ.
   Or on sait (II.3.c) que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe distingué.

3. (a) Supposons $X \subset Y$. Soit y' un élément de Y.
   y' commute avec tous les éléments de Y donc à fortiori avec ceux de X.
   Autrement dit, y' est un élément de X'. On a donc $Y' \subset X'$.

   (b) Soit x un élément de X. Par définition de X', x commute avec les éléments de X'.
   Autrement dit x appartient au centralisateur X'' de X'.
   On a donc l'inclusion $X \subset X''$.

   (c) En utilisant la question précédente, avec X' à la place de X, on trouve $X' \subset X'''$.
   D'autre part, on sait que X est inclus dans X'' (question b).
   La question a) donne alors $(X'')' \subset X'$, c'est-à-dire $X''' \subset X'$.
   Finalement on a l'égalité $X''' = X'$.

4. (a) – Si H est abélien, tout élément x de H commute avec tous les éléments de H.
   Tout x de H est donc dans H' : on a l'inclusion $H \subset H'$.
   – Si on a $H \subset H'$, alors $H'' \subset H'$ (question précédente).
   Or les éléments de H'' commutent avec ceux de H' (H'' = centralisateur de H').
   $H'' \subset H' \Rightarrow$ à fortiori tout élément de H'' commute avec tout élément de H''.
   Le groupe H'' est donc abélien.
   – Enfin supposons que le groupe H'' soit abélien.
   Puisque $H \subset H''$, il en découle que le groupe H est abélien.

   (b) On sait déjà que H' est un sous-groupe de G.
   Pour montrer que H' est distingué, on se donne x dans G et a dans H'.
   Il faut montrer que $y = xax^{-1} \in H'$, donc que y commute avec les éléments de H.
   Soit h un élément quelconque de H. Tout d'abord $yh = (xax^{-1})h = xa(x^{-1}hx)x^{-1}$.
   L'élément $x^{-1}hx$ est dans H car H est distingué.
   Il en découle que a, qui est dans H', commute avec $x^{-1}hx$.
   Ainsi $yh = x(x^{-1}hx)ax^{-1} = hxax^{-1} = hy$, ce qu'il fallait démontrer.
   Conclusion : H' est un sous-groupe distingué de G.

IV. Produit de deux sous-groupes

1. Par symétrie, il suffit bien sûr de prouver $HK \subset KH \Rightarrow KH \subset HK$.

   On suppose donc que l'inclusion $HK \subset KH$ est vraie.

   Soit $x = kh$ un élément de KH, avec k dans K et h dans H.

   L'inverse de x s'écrit $x^{-1} = h^{-1}k^{-1}$ et est donc un élément de HK.

   On en déduit $x^{-1} \in KH$, donc $x^{-1} = k'h'$, avec $k' \in K'$ et $h' \in H'$.

   En passant à nouveau à l'inverse, on voit que $x = h'^{-1}k'^{-1}$ est un élément de HK.

   On a donc prouvé l'inclusion $KH \subset HK$, ce qui achève la démonstration.

2. – On suppose que HK est un sous-groupe de G.

     Il suffit par exemple de prouver l'inclusion $HK \subset KH$.

     Soit x un élément de HK. Son inverse est donc dans HK.

     Ainsi il existe h dans H et k dans K tels que $x^{-1} = hk$.

     En passant à l'inverse, on en déduit que $x = k^{-1}h^{-1}$ est un élément de KH.

     On a ainsi obtenu l'inclusion $HK \subset KH$, donc l'égalité $HK = KH$.

   – On suppose maintenant qu'on a l'égalité $HK = KH$.

     L'ensemble HK est bien sûr non vide.

     Soient x et y dans HK. Il faut prouver que xy^{-1} est dans HK.

     Il existe (h, h') dans H^2 et (k, k') dans K^2 tels que $x = hk$ et $y = h'k'$.

     On a alors $xy^{-1} = hkk'^{-1}h'^{-1}$.

     Or kk'^{-1} est dans K et h'^{-1} est dans H.

     L'élément $kk'^{-1}h'^{-1}$ est dans KH donc dans HK.

     Ainsi il existe h'' dans H et k'' dans K tels que $kk'^{-1}h'^{-1} = h''k''$.

     On en déduit $xy^{-1} = h(h''k'') = (hh'')k''$, ce qui est bien un élément de HK.

     Conclusion : HK est un sous-groupe de G.

3. Sans perdre de généralité, on peut supposer que H est distingué.

   On va prouver l'inclusion $HK \subset KH$, qui on le sait équivaut à l'égalité $HK = KH$.

   Soit $x = hk$ un élément de HK, avec h dans H et k dans K.

   On en déduit $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} = (k^{-1}h^{-1}k)k^{-1}$.

   Or H est distingué. L'élément $h' = k^{-1}h^{-1}k$ est donc dans H.

   On en déduit $x^{-1} = h'k^{-1}$ puis $x = kh'^{-1}$, ce qui prouve que x est dans KH.

   Ainsi $HK \subset KH$, et finalement l'égalité $HK = KH$.

   Conclusion : si H ou K est distingué, alors HK est un sous-groupe de G.

V. Quotient par un sous-groupe distingué

1. – Pour tout x de G, on a $x\mathcal{R}x$ car $x^{-1}x = e \in H$: la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

   – Soient x, y dans G tels que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire tels que $z = x^{-1}y \in H$.

     H étant un groupe, $z^{-1} = y^{-1}x$ est dans G. Donc $y\mathcal{R}x$: la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

– Soient x, y, z dans G tels que $x\mathcal{R}y$, et $y\mathcal{R}z$.

On a donc $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$.

Par stabilité, il en découle $x^{-1}yy^{-1}z \in H$, donc $x^{-1}z \in H$ donc $x\mathcal{R}z$.

Ainsi la relation $\mathcal{R}$ est transitive. Finalement c'est une relation d'équivalence.

– Si $H = G$, alors pour tous x, y de G on a $x\mathcal{R}y$: $\mathcal{R}$ est la relation “universelle”.

Si $H = \{e\}$, alors $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y = e \Leftrightarrow x = y$: $\mathcal{R}$ est la relation “égalité”.

2. Soit a un élément de G. Pour tout y de G :

$$y \in \overline{a} \Leftrightarrow a^{-1}y \in H \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ a^{-1}y = h \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ y = ah \Leftrightarrow y \in aH$$

On trouve donc : $\forall\, a \in G,\ \overline{a} = aH$.

3. (a) Soient x, x', y, y' quatre éléments de G. On suppose que $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$.

Cela signifie que $x' \in xH$ et $y' \in yH$ ou ce qui revient au même $yH = y'H$.

On en déduit $x'y' \in (xH)y'$, donc $x'y' \in x(Hy')$.

Ainsi $x'y' \in x(y'H)$ car H est distingué.

Or $y'H = yH$. On en déduit $x'y' \in x(yH)$, donc $x'y' \in (xy)H$ donc $\overline{x'y'} = \overline{xy}$.

Ainsi la classe $\overline{xy}$ ne dépend pas du choix de x dans $\overline{x}$ ni de celui de y dans $\overline{y}$.

En posant $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$, on a donc défini une loi interne sur G/H.

On peut également écrire que cette loi est définie par $(xH)(yH) = (xy)H$.

(b) – Pour tous x, y, z dans G, on a :

$\overline{x}\,(\overline{y}\,\overline{z}) = \overline{x}\,(\overline{yz}) = \overline{x(yz)} = \overline{(xy)z} = \overline{xy}\,\overline{z} = (\overline{x}\,\overline{y})\,\overline{z}$.

La loi de G/H est donc associative.

– Pour tout x de G : $\overline{x}\,\overline{e} = \overline{xe} = \overline{x} = \overline{ex} = \overline{e}\,\overline{x}$.

On constate donc que $\overline{e} = eH = H$ est le neutre de G/H.

– Pour tout x de G : $\overline{x^{-1}}\,\overline{x} = \overline{x^{-1}x} = \overline{e} = \overline{xx^{-1}} = \overline{x}\,\overline{x^{-1}}$.

On constate donc que l'inverse de $\overline{x}$ existe et est égal à $\overline{x^{-1}}$.

(c) Soient x, y deux éléments de G. On a les équivalences :

$$\overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x} \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{yx} \Leftrightarrow (xy)^{-1}yx \in H \Leftrightarrow y^{-1}x^{-1}yx \in H$$

G/H est donc commmutatif$\Leftrightarrow$ H contient tous les $y^{-1}x^{-1}yx$, avec $(x, y) \in G^2$.