

Simulation DS 2

## Nombres Réels

### Problème – Suite de Fibonacci et théorème de Beatty

On note  $\Omega$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

La suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'élément de  $\Omega$  tel que  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  (on admet qu'un élément de  $\Omega$  est entièrement déterminé par ses deux premiers termes).

Soit  $X$  un ensemble. On dit que deux parties  $A$  et  $B$  de  $X$  forment une *partition* si  $X$  est réunion disjointe de  $A$  et de  $B$ , i.e.  $A \cap B = \emptyset$  et  $A \cup B = X$ .

Soit  $a \in ]1, +\infty[$ . On note

$$E_a = \{\lfloor na \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dans la seconde partie de ce problème, on cherche à montrer le *théorème de Beatty* : soit  $a, b \in ]1, +\infty[$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E_a$  et  $E_b$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .
2.  $a$  et  $b$  sont irrationnels, et  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

#### Partie A – Sur la suite de Fibonacci

**A.1** Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \Omega$ ,  $w = \lambda u + \mu v$ . Montrer que  $w \in \Omega$ .

**A.2** Déterminer les deux réels  $\phi$  et  $\psi$ , où  $\phi > \psi$ , tels que les suites  $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartiennent à  $\Omega$ .

**A.3** Montrer qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$F_n = a\phi^n + b\psi^n,$$

et déterminer ces réels.

**A.4** Donner un équivalent simple de  $F_n$ . En déduire que  $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, et déterminer sa limite.

#### Partie B – Théorème de Beatty

Soit  $a, b \in ]1, +\infty[$ .

**B.1** Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$f_a(m) = \text{Card}(\{p \in E_a, p \leq m\}).$$

**a** Établir, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{m+1}{a} - 1 \leq f_a(m) < \frac{m+1}{a}.$$

Que dire de la première inégalité dans le cas où  $a$  est irrationnel ?

**b** En déduire que la suite  $\left(\frac{f_a(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge, et déterminer sa limite.

**B.2** On suppose dans cette question que  $E_a$  et  $E_b$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

**a** Montrer que :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

**b** Montrer que  $\frac{a}{b}$  est irrationnel. En déduire que  $a$  et  $b$  le sont aussi.

**B.3** On suppose ici  $a$  et  $b$  irrationnels, et  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

**a** Montrer que  $E_a \cap E_b = \emptyset$ .

**b** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Établir :

$$m - 1 < f_a(m) + f_b(m) < m + 1.$$

En déduire que  $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$ .

**B.4** Montrer que  $E_\phi$  et  $E_{\phi^2}$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

# Corrigé de devoir non surveillé

## Problème – Suite de Fibonacci et théorème de Beatty

### Partie A – Sur la suite de Fibonacci

**A.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + u_n) + \mu(v_{n+1} + v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= w_{n+1} + w_n, \end{aligned}$$

donc  $w \in \Omega$ .

**A.2** Soit  $a$  un réel. La suite  $(a^n)$  appartient à  $\Omega$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n,$$

si et seulement si  $a^2 = a + 1$ , si et seulement si  $a$  est racine de  $X^2 - X - 1$ , i.e.  $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Les deux réels recherchés sont donc  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**A.3** On peut trouver des réels  $a$  et  $b$  tels que

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a\phi + b\psi = 1.$$

En effet, ce système étant de Cramer (car  $\psi - \phi \neq 0$ ), il admet une unique solution. Un calcul simple donne  $a = \frac{1}{\sqrt{5}} (= -b)$ .

Les suites de termes généraux  $F_n$  et  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$  appartiennent à  $\Omega$ , et coïncident aux deux premiers rangs : elles sont égales par le résultat admis.

**A.4** On a  $0 < \psi < 1 < \phi$ , donc  $\psi^n = o(\phi^n)$ , de sorte que  $F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ .

Dès lors,  $\frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \phi$ , donc  $(F_{n+1}/F_n)$  converge vers  $\phi$ .

### Partie B – Théorème de Beatty

**B.1**

**a** Observons que  $n \mapsto [na]$  est injective, car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n+1)a - na = a > 1$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .  $f_a(m)$  est donc le nombre d'entiers naturels non nuls  $p$  tels que  $[pa] \leq m$ , c'est-à-dire le plus grand entier tel que l'on ait cette inégalité.

Or, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $[pa] \leq m$  si et seulement si  $pa < m + 1$ , si et seulement si  $p < \frac{m+1}{a}$ . Comme  $f_a(m)$  est le plus grand entier vérifiant ceci, on a  $f_a(m) < \frac{m+1}{a}$  et  $f_a(m) + 1 \geq \frac{m+1}{a}$ , d'où le résultat.

Dans le cas où  $a$  irrationnel, il ne peut pas y avoir égalité : la première inégalité est stricte.

**b** D'après la question précédente,  $f_a(m) = \frac{m}{a} + O(1) \sim \frac{m}{a}$ , donc la suite  $\left(\frac{f_a(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{a}$ .

**B.2**

**a** Par hypothèse, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_a(m) + f_b(m) = m$ , d'où, en divisant par  $m$ , puis en passant à la limite à l'aide de B.1.b :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

**b** Supposons  $\frac{a}{b}$  rationnel : il existe donc des entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$  tels que  $pa = qb$ . On a alors  $[pa] = [qb] \in E_a \cap E_b = \emptyset$ , c'est absurde.

$\frac{a}{b}$  est donc bien irrationnel. Si  $a$  ou  $b$  était rationnel alors  $a$  et  $b$  le seraient (grâce à la question précédente), donc  $a/b$  le serait également :  $a$  et  $b$  sont irrationnels.

**B.3**

**a** Supposons avoir deux entiers  $p, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$ . Notons  $k$  cet entier. On a donc  $pa, qb \in [k, k+1[$ , puis  $p \in [k/a, (k+1)/a[$  et  $q \in [k/b, (k+1)/b[$ , et même, puisque  $a$  et  $b$  sont irrationnels,  $p \in ]k/a, (k+1)/a[$  et  $q \in ]k/b, (k+1)/b[$ , ce qui conduit enfin à l'absurdité  $p+q \in ]k, k+1[$ .

On a bien  $E_a \cap E_b = \emptyset$ .

**Remarque :** on pouvait aussi montrer ce résultat en observant que  $f_a(k-1) + f_b(k-1) > \frac{k}{a} - 1 + \frac{k}{b} - 1 = k - 2$ , donc  $f_a(k-1) + f_b(k-1) \geq k - 1$ , puis, comme  $k \in E_a \cap E_b$ ,

$$f_a(k) + f_b(k) = 2 + f_a(k-1) + f_b(k-1) \geq k + 1,$$

ce qui contredit l'inégalité de droite de B.1.a.

**b** Comme  $a$  et  $b$  sont irrationnels, on a, en vertu de B.1.a :

$$\frac{m+1}{a} - 1 < f_a(m) < \frac{m+1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{b} - 1 < f_b(m) < \frac{m+1}{b},$$

puis, en sommant (et sachant que  $1/a + 1/b = 1$ ) :

$$m - 1 < f_a(m) + f_b(m) < m + 1.$$

Comme  $f_a(m) + f_b(m)$  est entier,  $f_a(m) + f_b(m) = m$ .  $E_a$  et  $E_b$  étant disjoints,  $\{p \in E_a, p \leq m\}$  et  $\{p \in E_b, p \leq m\}$  sont disjoints, et la somme de leur cardinaux vaut  $m$  : on a donc

$$\{p \in E_a, p \leq m\} \cup \{p \in E_b, p \leq m\} = \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Ceci valant pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on a bien  $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$ .

**B.4**  $\phi$  et  $\phi^2$  sont des irrationnels supérieurs à 1 tels que  $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$  (car  $\phi^2 = \phi + 1$ ) : le théorème de Beatty s'applique,  $E_\phi$  et  $E_{\phi^2}$  forment bien une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

