

Devoir Maison N° 14

Matrices

Applications linéaires

— On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \longmapsto XP'' + (X - 4)P' - 3P$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Ecrire la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. A l'aide de la question précédente, calculer $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.
4. Déterminer le rang de f . Préciser l'image de f .
5. Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.
6. Etablir que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Im} f \oplus \ker f$.
7. **Diagonalisation de f .**
 - a. Calculer $f(X - 4)$.
 - b. Etablir qu'il existe un unique polynôme unitaire Q de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.
Etablir de même qu'il existe un unique polynôme unitaire $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
 - c. On considère la famille $B' = \{1, X - 4, Q, R\}$.
Démontrer que la famille B' est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - d. Ecrire la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B' .
 - e. Etablir qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que : $D = P^{-1}MP$.
(on ne demande pas de calculer P^{-1}).

8. Dans cette question, on note encore $D = M_{B'}(f)$ et $M = M_B(f)$ les matrices introduites précédemment, et I_4 la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on note U le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)$.

a. Calculer : $U(D) = D(D + I_4)(D + 2I_4)(D + 3I_4)$.

b. Si λ désigne un réel quelconque, que vaut $P(D + \lambda I_4)P^{-1}$?

c. En déduire : $U(M) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

d. Soit n un entier naturel non nul. Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

e. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$ est de rang 4.

$$P \longmapsto P(M)$$



CORRIGE

On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \longmapsto XP'' + (X - 4)P' - 3P$$

1/ Soit P un polynôme de degré ≤ 3 . On a :

$$\deg(XP'' + (X - 4)P' - 3P) \leq \max(\deg(XP''), \deg((X - 4)P'), \deg(-3P))$$

Or : $\deg(XP'') \leq 2$, $\deg((X - 4)P') \leq 3$ et $\deg(-3P) \leq 3$.

Par suite : $\deg(XP'' + (X - 4)P' - 3P) \leq 3$.

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ce qui assure déjà que f est bien définie.

Considérons à présent deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_3[X]$, et deux réels λ et μ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)'' + (X - 4)(\lambda P + \mu Q)' - 3(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda XP'' + \mu XQ'' + \lambda(X - 4)P' + \mu(X - 4)Q' - 3\lambda P - 3\mu Q = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Ce qui assure que f est linéaire. **Conclusion.** $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

2/ On a : $f(1) = -3$; $f(X) = -2X - 4$; $f(X^2) = -X^2 - 6X$ et $f(X^3) = -6X^2$. On en déduit que la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3/ Notons $X_B \in \mathbb{R}^4$ le quadruplet des coordonnées de $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$ dans la base B . D'après la question précédente :

$$X_B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

4/ On a : $\text{rg}(f) = \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$.

On en déduit que : $\dim(\text{Im}f) = 3$. Puisque $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ sont clairement non coplanaires, la famille $\mathcal{F} = \{f(1), f(X), f(X^2)\}$ est une famille libre de $\text{Im}f$; son cardinal étant égal à la dimension de $\text{Im}f$, la famille \mathcal{F} en est une base. Donc : $\dim(\text{Im}f) = 3$.

Enfin, \mathcal{F} étant composée de 3 polynômes de degré inférieur ou égal à 2, $\text{Im}f$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisqu'en outre $\text{Im}f$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont de même dimension, on peut conclure que : $\boxed{\text{Im}f = \mathbb{R}_2[X]}$.

5/ D'après la question précédente et le théorème du rang : $\dim(\ker f) = 1$. Or, d'après la question 3, $X^3 - 6X^2 + 18X - 24 \in \ker f$.

Conclusion. Le noyau de f est la droite vectorielle : $\ker f = \text{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

6/ D'après la question 4, $\text{Im}f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est un sev de dimension 3 dans un ev de dimension 4). D'après la question 5, $\ker f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}_3[X]$ engendrée par le polynôme $P_1 = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$. Puisque P_1 est de degré 3, il n'appartient pas à $\text{Im}f$.

On peut donc conclure : $\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \text{Im}f \oplus \ker f}$.

7/ **Diagonalisation de f .**

a/ D'après la question 2, on a : $f(X - 4) = f(X) - 4f(1) = -2X - 4 - 4(-3) = -2X + 8 = -2(X - 4)$.

Conclusion. $f(X - 4) = -2(X - 4)$.

b/ Soit Q un polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $Q = X^2 + bX + c$. Notons X_B le quadruplet des coordonnées de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{aligned} [f(Q) = -Q] &\iff [MX_B = -X_B] \iff [(M + I_4)X_B = 0_{\mathbb{R}^4}] \\ &\iff \left[\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \iff \begin{cases} -2c - 4b = 0 \\ -b - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -6 \\ c = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le polynôme $Q = X^2 - 6X + 12$ est l'unique polynôme unitaire de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.

Par ailleurs, on a déjà établi que $\ker f = \text{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

Donc le polynôme $R = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$ est l'unique polynôme unitaire tel que : $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

c/ Notons : $B' = \{1, X - 4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$. Supposons qu'il existe 4 réels a , b , c et d tels que :

$$a + b(X - 4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0$$

Alors : $dX^3 + (c - 6d)X^2 + (18d - 6c + b)X + a - 4b + 12c - 24d = 0$. Par identification des coefficients en X^3 , on a : $d = 0$.

D'où : $cX^2 + (-6c + b)X + a - 4b + 12c = 0$. Par identification des coefficients en X^2 , on a : $c = 0$.

D'où : $bX + a - 4b = 0$. Par identification des coefficients en X , on a : $b = 0$. D'où $a = 0$.

Ainsi : $[a + b(X - 4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0] \implies [a = b = c = d = 0]$.

Ce qui prouve que B' est libre. Puisque de plus le cardinal de B' est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, on peut affirmer que B' est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion. La famille $\{1, X - 4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

d/ On a $f(1) = -3$ (quest. 2); $f(X - 4) = -2(X - 4)$ (quest. 7-a);

$$f(X^2 - 6X + 12) = -(X^2 - 6X + 12) \text{ (quest. 7-b); } f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \text{ (quest. 3).}$$

On en déduit que la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B' est :

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e/ Notons $P = P_{BB'}$ la matrice de passage de la base canonique à la base B' .

$$\text{On a : } P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme toute matrice de passage, P est inversible*, et $P^{-1} = P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}$.

D'après la formule du changement de base, on a : $M_{B'}(f) = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}$.

Avec les notations de l'énoncé, on a donc : $D = P^{-1} M P$.

8/ **Sev engendré par les itérés de f .**

a/ D'après la question 7-d, on a : $D = \text{diag}(-3, -2, -1, 0)$. On en déduit que : $D + I_4 = \text{diag}(-2, -1, 0, 1)$, $D + 2I_4 = \text{diag}(-1, 0, 1, 2)$ et $D + 3I_4 = \text{diag}(0, -2, 1, 2)$.

On en déduit que : $D(D + I_4)(D + 2I_4)(D + 3I_4) = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$.

Conclusion. $U(D) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$

b/ D'après la question précédente, on a : $D = P^{-1} M P$. Par ailleurs, pour tout réel λ : $\lambda I_4 = \lambda P^{-1} I_4 P$.

On en déduit que, pour tout réel λ on a : $D + \lambda I_4 = P^{-1} M P + \lambda P^{-1} I_4 P = P^{-1} (M + \lambda I_4) P$

Conclusion. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, D + \lambda I_4 = P^{-1} (M + \lambda I_4) P$ soit encore : $M + \lambda I_4 = P (D + \lambda I_4) P^{-1}$.

c/ Par définition du polynôme U , on a : $U(M) = M(M + I_4)(M + 2I_4)(M + 3I_4)$.

On déduit alors de la question précédente que :

$$\begin{aligned} U(M) &= \underbrace{P D P^{-1}}_{=M} \underbrace{P (D + I_4) P^{-1}}_{M+I_4} \underbrace{P (D + 2I_4) P^{-1}}_{M+2I_4} \underbrace{P (D + 3I_4) P^{-1}}_{M+3I_4} \\ &= P D (D + I_4) (D + 2I_4) (D + 3I_4) P^{-1} = P \underbrace{U(D)}_{=0_{M_4(\mathbb{R})}} P^{-1} = 0_{M_4(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Conclusion. $U(M) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$

*. Il est d'ailleurs clair que P est une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ de rang 4, donc inversible.

d/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $X^n = UQ_n + R_n$, avec $\deg(R_n) < \deg(U)$.

Puisque U est un polynôme de degré 4, le polynôme R_n est dans $\mathbb{R}_3[X]$. Il existe par conséquent quatre réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que : $R_n = a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$.

On en déduit que : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$. L'évaluation de cette relation en 0 donne : $d_n = 0^n$, soit $d_n = 0$ (puisque $n \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion. Pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

d/ Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente, on a : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$.

Par conséquent : $M^n = U(M)Q_n(M) + a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Or $U(M) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$ d'après la question 8-c.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Et naturellement : $M^0 = I_4$. (♠)

Notons à présent $F = \text{Vect}(I_4, M, M^2, M^3)$ le sev de $M_4(\mathbb{R})$ engendré par $B_0 = \{I_4, M, M^2, M^3\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$.

On a : $\varphi(P) = \sum_{k=0}^N a_k \varphi(X^k) = \sum_{k=0}^N a_k M^k$. Puisque les matrices M^k appartiennent à F d'après (♠), et que F est un sev de $M_4(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire des matrices M^k appartient à F . Par suite : $\varphi(P) \in F$. Ce qui assure que : $\text{Im}\varphi \subset F$.

Réciproquement, il est immédiat que : $I_4 = \varphi(1)$; $M = \varphi(X)$; $M^2 = \varphi(X^2)$ et $M^3 = \varphi(X^3)$ (les polynômes 1, X , X^2 et X^3 sont en effet dans $\mathbb{R}_N[X]$ puisque $N \geq 3$). Les générateurs de F appartiennent à l'image de φ . Puisque $\text{Im}\varphi$ est également un sev, on en déduit que : $F \subset \text{Im}\varphi$.

On a donc établi que : $\text{Im}\varphi = F$, c'est à dire : $\boxed{\text{Im}\varphi = \text{Vect}(I_4, M, M^2, M^3)}$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $B_0 = \{I_4, M, M^2, M^3\}$ est libre pour conclure.

A cette fin, on considère la famille $B_1 = \{I_4, D, D^2, D^3\}$. Montrons que B_1 est libre. Supposons qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

$$\text{Alors : } \begin{pmatrix} a - 3b + 9c - 27d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a - 2b + 4c - 8d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - b + c - d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{R})}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } \begin{cases} a - 3b + 9c - 27d = 0 \\ a - 2b + 4c - 8d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ a = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3b + 9c - 27d = 0 \\ -2b + 4c - 8d = 0 \\ -b + c - d = 0 \\ a = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b - c + d = 0 \\ -3b + 9c - 27d = 0 \\ -2b + 4c - 8d = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b - c + d = 0 \\ 6c - 24d = 0 \\ 2c - 6d = 0 \\ a = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b - c + d = 0 \\ 6c - 24d = 0 \\ 6d = 0 \\ a = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ a = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $B_1 = \{I_4, D, D^2, D^3\}$ est libre.

Par ailleurs, l'application $\rho : C \in M_4(\mathbb{R}) \mapsto PCP^{-1}$ est un automorphisme de $M_4(\mathbb{R})$ (d'automorphisme réciproque $\rho^{-1} : C \in M_4(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}CP$).

Puisque la famille B_0 est l'image de B_1 par ρ , la famille B_0 est libre (l'image d'une famille libre par une application injective étant libre).

En résumé, on a montré que $\text{Im}\varphi = \text{Vect}(I_4, M, M^2, M^3)$, et que la famille $\{I_4, M, M^2, M^3\}$ est libre. On en déduit que $\text{Im}\varphi$ est de dimension 4.

Conclusion. $\text{rg}(\varphi) = 4$ et $\text{Im}\varphi = \text{Vect}(I_4, M, M^2, M^3)$

EXERCICE 2 — Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(\star) \quad P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$$

1/ Soit $a \in \mathbb{C}$. Supposons que a est une racine de P . Alors : $P(a) = 0$ d'où $P((a + 1) - 1) = 0$. Puisque P satisfait la relation (\star) , on en déduit que : $P((a + 1)^2 - 1) = 0$.

De manière analogue : $P((a - 1) + 1) = 0$. Puisque P satisfait la relation (\star) , on en déduit que : $P((a - 1)^2 - 1) = 0$.

Conclusion. $\forall a \in \mathbb{C}, [P(a) = 0] \Rightarrow [P((a + 1)^2 - 1) = 0 \wedge P((a - 1)^2 - 1) = 0]$

2/ Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

a/ Supposons que a_0 est racine de \mathbb{C} . Notons, pour tout entier naturel n , $A(n)$ l'assertion : “ a_n est racine de P ”.

L'assertion $A(0)$ est vraie, par hypothèse.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n . Ceci signifie que a_n est racine de P . D'après la question 1, le complexe $(a_n + 1)^2 - 1$ est également racine de P .

Or : $(a_n + 1)^2 - 1 = a_n^2 + 2a_n = a_{n+1}$. Donc a_{n+1} est racine de P . Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $[a_0 \text{ racine de } P] \implies [\forall n \in \mathbb{N}, a_n \text{ racine de } P]$.