Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
(*Indication* : on pourra d'abord calculer AB et $A + B$.)

II. Homographies du plan complexe.

On introduit les parties de $\mathbb{C}$ suivantes :

— le cercle unité : $\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$;

— le disque ouvert délimité par ce cercle : $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;

— le demi-plan de Poincaré : $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$. L'homographie définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ est la fonction h qui à tout nombre complexe z tel que $cz + d \neq 0$, associe $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Partie 1 : Exemples

1) Soit h l'homographie définie par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, $h(z) \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}$, $h(z) \in \mathscr{P}$.

c) Déterminer les *points fixes* de h, *i.e.* les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.

d) Pour quel(s) nombre(s) complexe(s) Z l'équation $h(z) = Z$, d'inconnue z, possède-t-elle une solution sur $\mathbb{C}$?

2) Soit g l'homographie définie par $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in \mathbb{U}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{P}$, $g(z) \in \mathscr{D}$.

Partie 2 : Homographies conservant $\mathbb{U}$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$.
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h la fonction définie par $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

a) Montrer que h est une homographie, bien définie sur $\mathbb{U}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

5) Réciproquement, nous allons montrer que les homographies précédentes sont les seules à vérifier : $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$. Établissons deux résultats préliminaires.

a) Montrer que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}\beta)$.

b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a + 2\,\mathrm{Re}\left(b\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = 0$, alors $a = b = 0$.

6) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

a) Établir que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{c}d\mathrm{e}^{-i\theta}\right).$$

b) En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $\bar{a}b = \bar{c}d$.

c) Si $a = 0$, que peut-on dire de h ?

d) On suppose dorénavant que $a \neq 0$. Montrer que

$$\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) = 0.$$

e) Le cas $|a| = |c|$ est-il possible ?

f) Que peut-on dire si $|a| = |d|$? Conclure.

III. Une équation différentielle.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, **2π-périodiques** et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x-\pi) + \sin x$.

1) Question préliminaire : résoudre l'équation différentielle **(E)** : $f'' - f = -\sin x + \cos x$.

2) Soit f une fonction solution du problème.

a) Montrer que la fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants, dont le second membre est une somme de fonctions trigonométriques.

c) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha\mathrm{e}^{x} + \beta\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

Dans la suite on fixe un tel couple (α, β).

d) En utilisant la périodicité de f, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha(1 - \mathrm{e}^{2\pi})\mathrm{e}^{x} + \beta(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})\mathrm{e}^{-x} = 0$$

e) En dérivant la relation précédente, montrer que $\alpha = \beta = 0$

3) Réciproquement, la fonction trouvée est-elle solution du problème de départ ?

— FIN —