Devoir facultatif n° 3

On se propose ici de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein, qui s'énonce comme suit.

Soit E et F deux ensembles. S'il existe une injection de f de E dans F et une injection g de F dans E, alors il existe nécessairement une bijection de E sur F.

Partie A : un cas particulier
On se place d'abord dans le cas particulier où F est un sous-ensemble de E.
Dans cette partie, on notera $\overline{A}$ le complémentaire dans E de toute partie A de E.

1) Dans ce cas, il existe évidemment une injection de F dans E, laquelle ?

2) On suppose alors qu'il existe une injection f de E dans F et on construit par récurrence des parties de E, H_0, H_1, …, H_n,… définies par :

$$\begin{aligned} H_0 &= E \setminus F \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad H_{n+1} &= f(H_n) \end{aligned}$$

Et on pose $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

- **a)** Montrer que $\overline{H} \subset F$ et en déduire que $\overline{H} = \overline{H} \cap F$.
- **b)** Montrer que $f(H) = H \backslash H_0$ et en déduire que $f(H) = H \cap F$.

3) On note alors φ l'application de E dans E qui à tout élément x de E associe $f(x)$ si $x \in H$ et x sinon. Montrer que φ est injective.

4) Que vaut $\operatorname{Im} \varphi$? En déduire le résultat attendu dans le cas où $F \subset E$.

Partie B : le cas général
On se place maintenant dans le cas général. On se donne donc deux ensembles E et F, une injection f de E dans F et une injection g de F dans E.

5) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\operatorname{Im} g$. En déduire qu'il existe une bijection de E sur $\operatorname{Im} g$.

6) Remarquer qu'il existe une bijection de F sur $\operatorname{Im} g$ et en déduire le résultat.

Partie C : quelques exemples
On exploitera systématiquement le théorème de Cantor-Bernstein pour répondre aux questions suivantes.

7) Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

8) Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

9) Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. On pourra notamment montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

— FIN —