Devoir Maison N° 5

Suites Numériques

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but de ce devoir est étudier la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

Ces suites sont appelées des séries de Riemann. [1]

Dans la partie A, nous étudions le cas où $\alpha = 1$. Dans la partie B, nous étudions le cas où $\alpha = 2$ et nous déterminons dans ce cas la limite de la suite (S_n). Enfin, la partie C termine l'étude avec les autres valeurs de α.

La notation k^α avec $k \in \mathbb{N}^*$ n'a pas été définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ en terminale.
Par exemple, quel sens donner à $2^{\sqrt{2}}$? Nous verrons que, par définition, $k^\alpha = e^{\alpha \ln(k)}$ et vous pouvez vous servir de cette formule dans ce devoir.

Partie A - Cas où $\alpha = 1$

Le but de cette partie est donc d'étudier la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite s'appelle la série harmonique, c'est pour cela qu'on la note H_n ici au lieu de S_n.

1. **Divergence de la série harmonique.**

   (a) Soit k un entier naturel non nul, pour tout $x \in [k, k+1]$ donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$.

   (b) En intégrant, en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

   (c) En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à n, démontrer que :

   $$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

   En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

   (d) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

   C'est Oresme [2] qui a proposé la première preuve de la divergence de la série harmonique en 1360.
   Cette preuve manque de rigueur mais l'idée est simple à comprendre, vous la trouverez par exemple dans l'article Wikipédia sur la série harmonique.

   (e) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

   Cette dernière égalité permet de dire qu'en un certain sens la suite (H_n) tend vers $+\infty$ "comme" la suite $(\ln(n))$. On dit alors que ces deux suites sont équivalentes, ce que l'on note $H_n \sim \ln(n)$.

1. Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Il a apporté de nombreuses contributions à l'analyse et la géométrie différentielle et a défini certains outils mathématiques qui ont servi plus tard au développement de la théorie de la relativité.

2. Nicolas Oresme (1320-1382) a apporté des contributions à différents domaines : philosophie, astronomie, mathématique, économie, musique et physique. Il a été évêque de Lisieux et conseiller du roi Charles V.

2. **Encadrement de H_n.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = H_n - \ln(n)$$

$$v_n = H_n - \frac{1}{n} - \ln(n)$$

(a) i. Montrer que (u_n) est décroissante. On pensera à réutiliser l'inégalité de la question 1.(b)

ii. Montrer que (v_n) est croissante.

iii. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

iv. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On note γ la limite commune de ces deux suites, γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni[3]

(b) Justifier que $\gamma \in [0, 1]$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{n}$.

Une valeur approchée de γ à 10^{-3} près est $\gamma \approx 0,577$. On ignore actuellement si γ est un rationnel.

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

Soit n un entier naturel non nul. Dans cette partie, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (S_n) et de trouver sa limite.

1. **Convergence.** Soit $k \geq 2$ un entier.

(a) Démontrer que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(b) En déduire, en sommant les inégalités précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq 2$.

(c) Démontrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

(d) Justifier que la suite (S_n) converge.

Les questions suivantes visent à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2. **Calcul de la limite.** Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^k dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^k dt.$$

(a) Calculer I_0, J_0, I_1.

(b) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer J_1.

On ne cherchera pas à calculer explicitement I_k et J_k pour répondre aux questions suivantes.

3. Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse. C'est sans aucun doute l'un des plus grands et plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Lorenzo Mascheroni (1750-1800) est un mathématicien italien.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $I_k > 0$.

(d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2} I_k$.

(e) i. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une étude de fonction montrer que : $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

ii. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+2})$.

iii. Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{J_k}{I_k}\right)$ converge vers 0.

(f) i. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}.$$

ii. En déduire que $\dfrac{J_k}{I_k} - \dfrac{J_{k+2}}{I_{k+2}} = \dfrac{2}{(k+2)^2}$.

iii. En sommant les égalités précédentes, démontrer que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

On s'autorisera à noter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *maintenant que l'on sait que la limite existe.*
C'est Euler qui en 1735 a trouvé cette valeur, son approche est différente de celle présentée dans ce devoir.
On a également, par exemple, les valeurs suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Plus généralement quand l'exposant à la puissance de l'indice est pair, de la forme $2r$ où $r \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la somme est de la forme $\pi^{2r}q$ où q est un nombre rationnel.
Quand l'exposant est impair, on ne sait pas exprimer le résultat à l'aide de constantes connues telles que π ou e. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 1.2020569...$$

Partie C - Cas général

On reprend les notations du préambule, en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

On pourra bien entendu utiliser les résultats des parties B et C.

1. **Cas où** $\alpha \leq 1$**.** Démontrer que (S_n) diverge vers $+\infty$.
2. **Cas où** $\alpha \geq 2$**.** Démontrer que (S_n) converge, on ne cherchera pas à préciser la limite.
3. **Cas où** $\alpha \in]1, 2[$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que pour tout $t \in [k, k+1]$:

   $$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$S_n \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1$$

   (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée, puis démontrer qu'elle converge.
4. Conclure, en résumant tous les résultats démontrés dans ce devoir.

Pour terminer et pour en savoir plus, vous pouvez écrire dans Google : "deux minutes pour l'hypothèse de Riemann" et visionner la vidéo correspondante.

Corrigé

Partie A - Cas où $\alpha = 1$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}}$$

(b) Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer l'inégalité précédente entre k et $k+1$, ce qui donne :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

Or :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} = \Big[\frac{x}{k+1}\Big]_k^{k+1} = \frac{k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

De même, on démontre que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$.

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{k+1} \leq \Big[\ln(x)\Big]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} = H_{n+1} - 1$$

La somme centrale se simplifie en cascade :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = (\ln(2)-\ln(1)) + (\ln(3)-\ln(2)) + (\ln(4)-\ln(3)) + \cdots + (\ln(n+1)-\ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \qquad (\bigstar)$$

L'inégalité de droite nous donne : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n}$
D'autre part, on peut utiliser l'inégalité $(\bigstar)$ avec "$n = n-1$", c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2,\ H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}$$

En particulier, pour $n \geq 2$, on a : $\underline{H_n \leq \ln(n) + 1}$. On vérifie que cette inégalité demeure pour $n = 1$.
Finalement avec les inégalités soulignées, nous obtenons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

(d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après l'inégalité obtenue à la question précédente, cela implique que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

(e) Pour démontrer ceci, on divise l'inégalité obtenue à la question (c) par $\ln(n)$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$$

Pour tout $n \geq 2$, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

D'autre part, pour $n \geq 2$, on a : $\dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1}$$

2. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

Ici, on peut poser une fonction et l'étudier mais il est plus simple d'utiliser l'inégalité démontrée à la question 1.(b), pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$. Ce qui démontre bien que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

ii. On utilise la même méthode qu'à la question précédente toujours avec la question 1.(b) :

$$v_{n+1} - v_n = \left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(H_n - \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0}$$

iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après les trois questions précédentes, on a :

$$v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1, d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite réelle que l'on va noter α.

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_1, elle converge vers une limite réelle que l'on va noter β.

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \alpha - \beta = 0$. Ainsi $\alpha = \beta$ et :

$$\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une limite commune}}$$

(b) On reprend l'inégalité (★★) démontrée à la question précédente et l'on passe à la limite dans cette inégalité. Cela donne : $v_1 \leq \gamma \leq u_1$. Or $v_1 = 0$ et $u_1 = 1$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$$

(c) La suite (u_n) converge en décroissant vers γ et la suite (v_n) converge en croissant vers γ, ainsi pour tout entier naturel non nul n, on a : $v_n \leq \gamma \leq u_n$. Comme $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$, cela se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}}$$

On a $\gamma \approx 0.577215664901532$*. La constante* γ *intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, à titre d'exemple on peut citer :*

- $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = -\gamma$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx = -\gamma$
- *Le nombre moyen de diviseurs d'un entier naturel* n *est de l'ordre de grandeur de :* $\ln(n) + 2\gamma - 1$.

(d) À la question 2.(c), on a démontré que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$. En remplaçant u_n par sa définition, on a : $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}}$$

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

1. (a) Pour tout $k \geq 2$, on a $k \geq k-1$ ce qui implique que $k^2 \geq k(k-1)$. En passant à l'inverse, on obtient :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

La dernière égalité provenant simplement d'une réduction au même dénominateur. On a démontré que :

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

(b) On a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 \quad +\frac{1}{2^2} \quad +\frac{1}{3^2} \quad +\frac{1}{4^2} \quad +\frac{1}{5^2} \quad +\ldots \quad +\frac{1}{(n-1)^2} \quad +\frac{1}{n^2} \\ & \leq & 1 \quad +\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) \quad +\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \quad +\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \quad +\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) \quad +\ldots \quad +\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right) \quad +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right). \end{array}$$

Chaque terme étant majoré par celui qui se trouve en dessous.
Dans la dernière expression, on voit les simplifications en cascades qui se produisent :

$$1 \quad +\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right) \quad +\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) \quad +\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) \quad +\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right) \quad +\ldots \quad +\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right) \quad +\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{n}.$$

On obtient : $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 2}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons le signe de $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \left(1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Ceci montre que :

$$\boxed{(S_n) \text{ est strictement croissante}}$$

(d) D'après le théorème de la limite monotone toute suite croissante et majorée converge. D'après 1.(b) la suite (S_n) est majorée et d'après 1.(c) elle est croissante d'où :

$$\boxed{(S_n) \text{ converge}}$$

2. (a) On a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(b) Le calcul de J_1 va demander un peu plus de travail, il va falloir faire deux intégrations par parties successives. L'idée est de faire chuter le degré la fonction $t \mapsto t^2$ en dérivant. On pose :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \cos(t) & u_1(t) = \sin(t) \\ v_1(t) = t^2 & v_1'(t) = 2t \end{array}$$

Les fonctions u_1, v_1, u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\cos(t)}_{u_1'(t)} dt = \Big[\underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2t}_{v_1'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)} dt = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fait à nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2(t) = t & u_2'(t) = 1 \\ v_2'(t) = \sin(t) & v_2(t) = -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions u_2, v_2, u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt = \underbrace{\Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On obtient ainsi :

$$J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

En résumé, on a les valeurs suivantes qui nous serviront dans la suite :

$$\boxed{\begin{array}{ll} I_0 = \frac{\pi}{2} & J_0 = \frac{\pi^3}{24} \\ I_1 = 1 & J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{array}}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(t) > 0$ et par suite $\cos(t)^k > 0$. Par positivité de l'intégrale, cela donne :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k > 0}$$

(d) Pour effectuer une intégration par parties, il faut faire apparaître un produit de fonctions, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)^{k+1} dt.$$

On pose :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \cos(t) & u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos(t)^{k+1} & v'(t) = (k+1)(-\sin(t))\cos(t)^k \end{array}$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+2} &= \underbrace{\Big[\cos(t)^{k+1}\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k+1)\sin(t)^2\cos(t)^k dt = (k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^k dt \\ &= (k+1)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^k dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+2}(t)dt\Big) = (k+1)I_k - (k+1)I_{k+2}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $(k+2)I_{k+2} = (k+1)I_k$. On a bien démontré que :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}I_k}$$

(e) i. Pour démontrer ceci , étudions la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$, le but de la question est de prouver que f est positive quand $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f est dérivable et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f' : t \mapsto \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1$$

ceci montre que f' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque la fonction cosinus l'est. De plus $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'où le tableau de variation :

t	0		α		$\pi/2$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Ce qui prouve que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) \geq 0$. On a démontré que :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)}$$

ii. Soit $k \in \mathbb{N}$, en élevant au carré l'inégalité obtenue à la question précédente et en la multipliant par $\cos(t)^k$ qui est positif pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq t^2\cos(t)^k \leq \frac{\pi^2}{4}\sin(t)^2\cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4}\Big(1-\cos(t)^2\Big)\cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4}\Big(\cos(t)^k - \cos(t)^{k+2}\Big).$$

Par positivité de l'intégrale, intégrons l'inégalité précédente entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^k dt \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+2}\Big).$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+2}\Big)}$$

iii. Soit $k \in \mathbb{N}$, on divise la relation obtenue à la question précédente par I_k qui est strictement positif d'après la question 2.(c), cela donne :

$$0 \leq \frac{J_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(\frac{I_k}{I_k} - \frac{I_{k+2}}{I_k}\Big) = \frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \frac{k+1}{k+2}\Big)$$

ceci d'après la formule de la question 2.(d).
Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$ et par suite : $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \frac{k+1}{k+2}\Big) = 0$.
La suite $\left(\frac{J_k}{I_k}\right)$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0}$$

(f) i. Là aussi il s'agit d'utiliser la méthode d'intégration par parties, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{array}{ll} u_1(t) = \cos(t)^{k+2} & u_1'(t) = (k+2)(-\sin(t))\cos(t)^{k+1} \\ v_1'(t) = 1 & v_1(t) = t \end{array}$$

Les fonctions u_1, v_1, u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2}dt = \underbrace{\Big[t\cos(t)^{k+2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(t)^{k+1}dt. \qquad (\bigstar)$$

Pour transformer encore cette dernière intégrale, effectuons une nouvelle intégration par parties, on pose :

$$\begin{array}{ll} u_2(t) = \sin(t)\cos(t)^{k+1} & u_2'(t) = \cos(t)^{k+2} - (k+1)\sin(t)^2\cos^k(t) \\ v_2'(t) = t & v_2(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

Les fonctions u_2, v_2, u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(t)^{k+1}dt &= \underbrace{\Big[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos(t)^{k+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\Big(\cos(t)^{k+2} - (k+1)\sin(t)^2\cos(t)^k\Big)dt \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^{k+2}dt\Big) + \frac{k+1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2(1-\cos(t)^2)\cos(t)^k dt\Big) \\ &= -\frac{1}{2}J_{k+2} + \frac{k+1}{2}\Big(J_k - J_{k+2}\Big). \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'expression $(\bigstar)$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}}$$

ii. Divisons la relation précédente par I_{k+2} qui est non nul d'après la question 2.(c), ceci donne :

$$1=\frac{1}{2}\Big((k+1)(k+2)\frac{J_k}{I_{k+2}}-(k+2)^2\frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\Big)$$

Or $\dfrac{J_k}{I_{k+2}}=\dfrac{J_k}{\frac{k+1}{k+2}I_k}=\dfrac{k+2}{k+1}\dfrac{J_k}{I_k}$, d'où :

$$1=\frac{1}{2}\Big((k+2)^2\frac{J_k}{I_k}-(k+2)^2\frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\Big).$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{J_k}{I_k}-\frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}=\frac{2}{(k+2)^2}}$$

iii. Sommons pour k allant de 0 à $n-2$ les égalités précédentes :

$$\Big(\frac{J_0}{I_0}-\frac{J_2}{I_2}\Big)+\Big(\frac{J_1}{I_1}-\frac{J_3}{I_3}\Big)+\Big(\frac{J_2}{I_2}-\frac{J_4}{I_4}\Big)+\Big(\frac{J_3}{I_3}-\frac{J_5}{I_5}\Big)+...+\Big(\frac{J_{n-3}}{I_{n-3}}-\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}}\Big)+\Big(\frac{J_{n-2}}{I_{n-2}}-\frac{J_n}{I_n}\Big)$$

$$=\quad 2\Big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\Big).$$

Il y a des simplifications en cascades dans le membre de gauche, il reste :

$$\frac{J_0}{I_0}+\frac{J_1}{I_1}-\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}}-\frac{J_n}{I_n}=2(S_n-1).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{J_{n-1}}{I_{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{J_n}{I_n}=0$ d'après la question 2.(e).iii. Notons $l=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$, qui existe d'après la question 1. et passons à la limite dans la relation précédente :

$$\frac{J_0}{I_0}+\frac{J_1}{I_1}=2(l-1).$$

D'après la question 2.(a), on connait toutes les valeurs mises en jeu et on peut trouver la limite l voulue :

$$\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}}+\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{1}=2(l-1)\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{4}-2=2l-2\Leftrightarrow l=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi^2}{6}}$$

Partie C - Cas général

1. Soit $\alpha \leq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\alpha \ln(k) \leq \ln(k)$ car $\alpha \leq 1$ donc $e^{\alpha \ln(k)} \leq e^{\ln(k)}$ par croissance de la fonction exponentielle. Ceci nous donne $k^\alpha \leq k$ et en passant à l'inverse $\dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{k}$.
   On somme pour k allant de 1 à n avec $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   Dans la partie A, nous avons démontré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$.
   $$\boxed{\text{Si } \alpha \leq 1 \text{ alors } (S_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$
2. Avec le même raisonnement que dans la question précédente, comme $\alpha \geq 2$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k^\alpha} \leq \dfrac{1}{k^2}$.
   Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
   Or la suite présente dans le membre de droite converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ comme nous l'avons appris dans la partie B, en particulier c'est une suite majorée. Ceci permet d'affirmer que, dans le cas où $\alpha \geq 2$, la suite (S_n) est majorée. De plus, elle est croissante car pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$$
   Finalement (S_n) est une suite croissante et majorée, elle converge.
   $$\boxed{\text{Si } \alpha \geq 2 \text{ alors } (S_n) \text{ converge}}$$
3. (a) On s'inspire de la méthode de la question 1. de la partie A. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in [k, k+1]$, on a : $k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$. En effet, la fonction $f : t \mapsto t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ car ln et exponentielle sont croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs et $\alpha \geq 0$.
   En passant à l'inverse, on a :
   $$\forall t \in [k, k+1], \ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$
   Il reste à intégrer l'inégalité précédente entre k et $k+1$ par croissance de l'intégrale, il vient :
   $$\boxed{\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}}$$
   Ceci en ayant remarqué que l'intégrale d'une constante sur un intervalle de longueur 1 vaut la constante, comme dans la question 1.(b) de la partie A.

(b) On somme les inégalités précédentes, pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Pour la première somme, on reconnait S_n mais il manque le premier terme $\frac{1}{1^\alpha} = 1$. On simplifie la somme centrale à l'aide de la relation de Chasles. Enfin, on oublie le membre de droite de notre double inégalité dont nous n'allons pas avoir besoin :

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n - \frac{1}{n^\alpha}$$

L'intégrale se calcule :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{1}{-\alpha+1}\left(n^{-\alpha+1} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - n^{-\alpha+1}\right)$$

En tenant compte de cette simplification et en ajoutant 1 à l'inégalité, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1}$$

(c) Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ donc $1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 1$. D'après l'inégalité précédente, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

Ainsi la suite (S_n) est bornée.

On ne pouvait pas simplement reprendre le résultat de la question précédente pour affirmer que (S_n) est majorée car un majorant ne doit pas dépendre de n.

Avec exactement le même calcul que dans la question 2., on montre que (S_n) est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante majorée converge.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \in]1,2[,\ (S_n) \text{ converge.}}$$

4. En résumé, on connait complètement la nature des suites (S_n) selon $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\text{la suite de terme général } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Avec le cas particulier $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.