Mercredi 08 Février 2017

Structures Algébriques

Dérivation dans un anneau

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau (qui n'est pas a priori supposé commutatif)

On note 0 et 1 les éléments neutres additif et multiplicatif de A.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée dérivation sur A si et seulement si, pour tout $x,y \in A$ on a les relations :

(1) $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$

(2) $\delta(xy) = x\delta(y)+\delta(x)y$

Partie I – Crochet de Lie et exemple de dérivation

Pour $a,b \in A$, on pose $[a,b] = ab - ba$.

1. Que vaut $[a,b]$ lorsque a et b commutent ?

2. On revient au cas général et on se donne a,b,c dans A.

2.a Former une relation liant $[a,b]$ et $[b,a]$.

2.b Etablir que $[a,b+c] = [a,b]+[a,c]$.

2.c Justifier $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]] = 0$.
Cette dernière relation est connue sous le non d'identité de Jacobi.

3. Pour $a \in A$, on considère $d_a : A \to A$ l'application définie par $d_a(x) = ax - xa$.
Montrer que d_a est une dérivation sur A.

Partie II – Propriétés des dérivations

Soit δ une dérivation quelconque sur A.

1. En exploitant les relations (1) et (2) calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$.

2. Soit x un élément de l'anneau $(A,+,\times)$.

2.a Exprimer $\delta(-x)$ en fonction de $\delta(x)$.

2.b On suppose que x est inversible.
Exprimer $\delta(x^{-1})$ en fonction de $\delta(x)$ et de x^{-1}.

3. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$.

3.a Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une liste d'éléments de A.
Exprimer $\delta(x_1 x_2 \ldots x_n)$ en fonction des x_k et des $\delta(x_k)$.

3.b Soit $x \in A$. Exprimer $\delta(x^n)$.
Que devient cette formule si x et $\delta(x)$ commutent ?

4. Soit $C_\delta = \{x \in A \,/\, \delta(x) = 0\}$.

4.a Montrer que C_δ est un sous-anneau de $(A,+,\times)$.

4.b Montrer que, si $(A,+,\times)$ est un corps, alors C_δ est un sous-corps de $(A,+,\times)$.

Partie III – Manipulation de dérivations

1. Dans cette question δ_1,δ_2 désignent deux dérivations sur A.

1.a Pensez-vous que l'application $\delta_1+\delta_2$ est une dérivation ?

1.b Pensez-vous que l'application $\delta_1\circ\delta_2$ est une dérivation ?

1.c On note $[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\circ\delta_2-\delta_2\circ\delta_1$

Montrer que $[\delta_1,\delta_2]$ est une dérivation sur A.

2. Soit δ une dérivation sur A et a,b deux éléments de A.

2.a Montrer que $[\delta,d_a]=d_{\delta(a)}$.

2.b Montrer que $[d_a,d_b]=d_{[a,b]}$.

Correction

Partie I

1. Si $ab = ba$ alors $[a,b] = 0$.

2.a $[b,a] = -[a,b]$.

2.b $[a,b+c] = a(b+c) - (b+c)a = ab - ba + ac - ca = [a,b] + [a,c]$.

2.c $[a,[b,c]] = abc - acb - bca + cba$ etc…

3. On remarque que $d_a(x) = [a,x]$.
$d_a(x+y) = [a,x+y] = [a,x] + [a,y] = d_a(x) + d_a(y)$.
$d_a(xy) = axy - xya$, $xd_a(y) + d_a(x)y = xay - xya + axy - xay = axy - xya$ donc
$d_a(xy) = xd_a(y) + d_a(x)y$.

Partie II

1. $\delta(0) = \delta(0+0) = \delta(0) + \delta(0)$ donc $\delta(0) = 0$.
$\delta(1) = \delta(1 \times 1) = 1 \times \delta(1) + \delta(1) \times 1 = 2\delta(1)$ donc $\delta(1) = 0$.

2.a $\delta(0) = \delta(x) + \delta(-x)$ donc $\delta(-x) = -\delta(x)$.

2.b $\delta(1) = x\delta(x^{-1}) + \delta(x)x^{-1}$ donc $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1}$.

3.a $\delta(x_1x_2\ldots x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_1 \ldots x_{k-1}\delta(x_k)x_{k+1}\ldots x_n$.

3.b $\delta(x^n) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\delta(x)x^{n-k}$.
Si x et $\delta(x)$ commutent : $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$.

4.a C_δ, $1 \in C_\delta$, $\forall x,y \in C_\delta$, $\delta(x-y) = \delta(x) - \delta(y) = 0$ et $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y = 0$ donc $x-y, xy \in C_\delta$.

4.b $\forall x \in C_\delta \setminus \{0\}$, $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1} = 0$ donc $x^{-1} \in C_\delta$.

Partie III

1.a Oui et on le vérifie sans peine.

1.b Non, par exemple dans le cadre de l'anneau des fonctions d'une variable réelle dérivable, la composée de la dérivation usuelle avec elle-même donne la dérivation seconde, qui n'est pas une dérivation (problème pour la formule (2)).

1.c Sans peine $[\delta_1,\delta_2](x+y) = [\delta_1,\delta_2](x) + [\delta_1,\delta_2](y)$.
$[\delta_1,\delta_2](xy) = \delta_1(\delta_2(xy)) - \delta_2(\delta_1(x,y)) = \delta_1(x\delta_2(y) + \delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y) + \delta_1(x)y)$ donne après simplification de termes $\delta_2(x)\delta_1(y), \delta_1(x)\delta_2(y)$:
$[\delta_1,\delta_2](xy) = x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(\delta_2(x))y - x\delta_2(\delta_1(y)) - \delta_2(\delta_1(x))y$.
Or ceci correspond à $x[\delta_1,\delta_2](y) + [\delta_1,\delta_2](x)y$ comme voulu.

2.a $[\delta,d_a](x) = \delta(ax - xa) - a\delta(x) + \delta(x)a = \delta(a)x - x\delta(a)$ après simplification de termes $a\delta(x)$ et $\delta(x)a$.
Ainsi $[\delta,d_a](x) = d_{\delta(a)}(x)$ et puisque ceci vaut pour tout $x \in A$: $[\delta,d_a] = d_{\delta(a)}$.

2.b $[d_a,d_b] = d_{d_a(b)} = d_{[a,b]}$.